Workshop on Quark and Lepton Masses and Mixings at Shizuoka

2005年12月20日

問題提起：
荷電レプトン質量公式が示唆する質量行列統一理解への道

１　なぜシーソー型モデルを考えるのか？

--- その思考の道筋 ---

２　２つの独立研究課題

３　課題Ｂ：直ちに生ずる問題点

４　課題Ａ：ヒグスポテンシャルと対称性

１　なぜシーソー型モデルを考えるのか？
--- その思考の道筋 ---

(1) 荷電レプトン質量公式

$$m_e + m_\mu + m_\tau = \frac{2}{3}(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2 \qquad (1.1)$$

は，観測値を入力すると，ともかくよく合う

Y. Koide, MPL A5, 2319 (1990)

Y K, LNC 34, 201 (1982); PRD 28, 252 (1983)

$$m_\tau = \left[2(\sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_e}) + \sqrt{3}\sqrt{m_\mu + m_e + 4\sqrt{m_e m_\mu}}\right]^2$$

$$= 1776.97 \text{ MeV}$$

$$m_\tau^{exp} = 1776.99^{+0.29}_{-0.26} \text{ MeV} \qquad (1.2)$$

(2) 通常の質量行列モデルでは

$$M_e = Y_e \langle \phi_d^0 \rangle \qquad (1.3)$$

$Y_e(\mu)$ の構造はエネルギー依存性を持つ

一般には $Y_e(M_Z) \neq Y_e(M_{GUT})$

(1.1)式があんなに合うことの説明がつかない

最後まで破れずに残るある対称性が存在して

それが Y_e が(1.1)式を満たすことを保証する

(3) 別の考え

Y_e の形はRGE不変

$$Y_e = y_e 1 \qquad (1.4)$$

質量スペクトルは3つの Higgs scalars ϕ_i の VEVスペクトルから来る

公式(1.1)は low energy ではじめて出現する

(4) 公式(1.1)は $\sqrt{m_i}$ の形で記述

→ シーソー型質量行列模型

$$(M_e)_{ij} = v_i \frac{\delta_{ij}}{M_E} v_j \qquad (1.5)$$

$v_i \equiv \langle \phi_i \rangle$ は

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{2}{3}(v_1 + v_2 + v_3)^2 \qquad (1.6)$$

を満たす

２　２つの独立研究課題

課題A:

関係式(1.6)を与えるHiggs potential の研究

どのようなメカニズム（または Symmetry)が(1.6)式を導くか？

そのときの physical Higgs scalars は？

課題B：

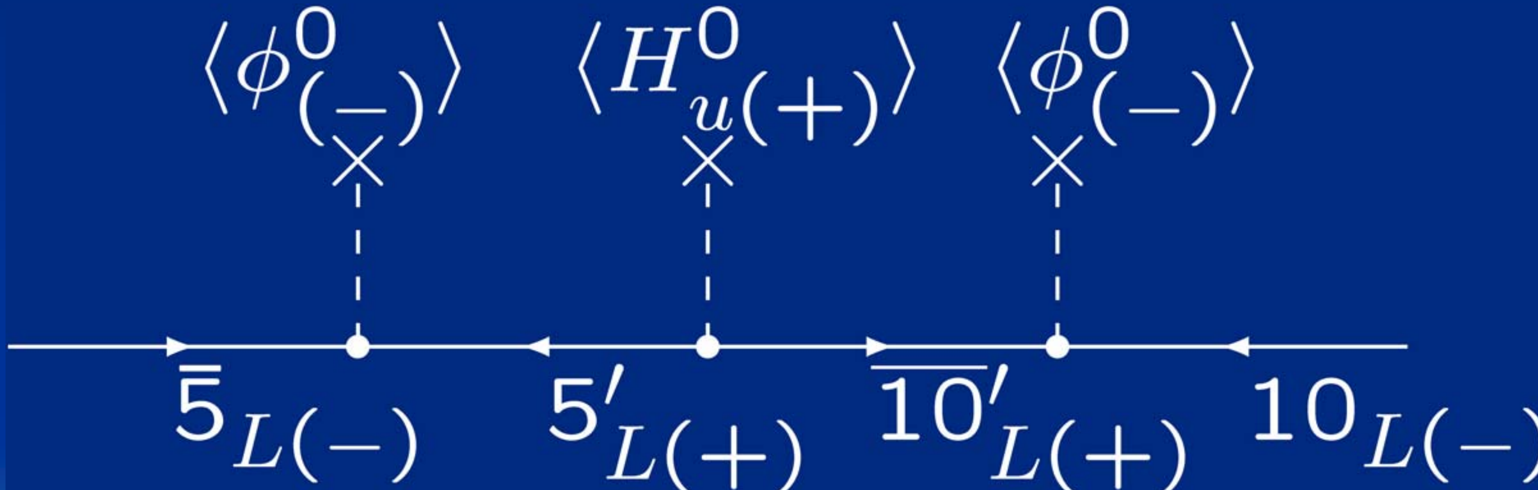
関係式(1.6)を満たす v_i を持つ ϕ_i が存在したとして，それによってM_e だけでなく，M_ν, $M_{\mathbf{u}}$, $M_{\mathbf{d}}$ までも統一的に説明できるか？

３　課題B:直ちに生ずる問題点

3.1 FCNCの出現

FCNCを禁止するには

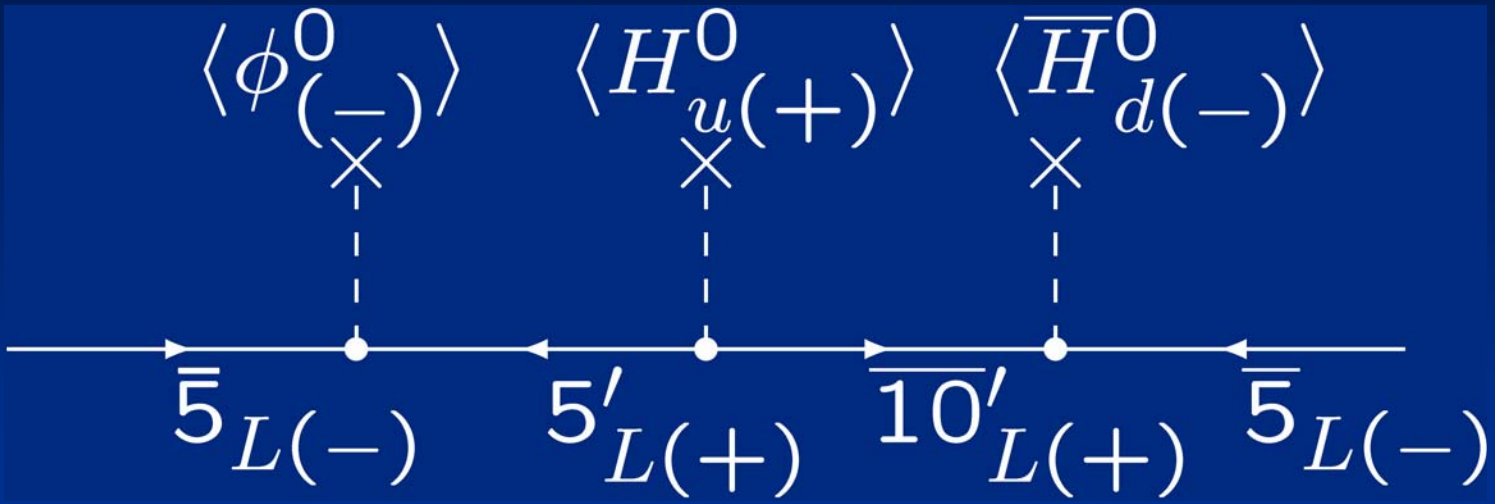
ϕ_i は $SU(2)_L$ singlet と考えればよい



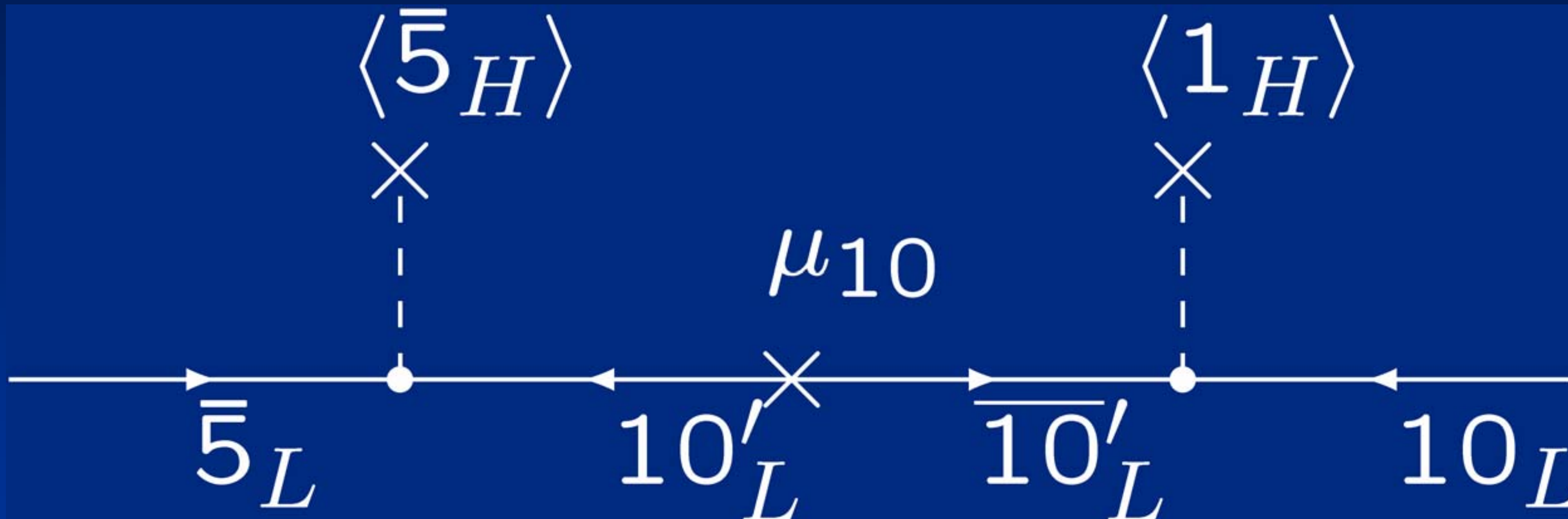
$$M_e \sim v_S (v_u)^{-1} v_S$$

v_u のオーダーで新粒子(mirror fermions)が登場

小さなニュートリノ質量が出せない！



- **SU(2)$_L$ singlets と doublets の ϕ_iを考えるべき**



$$M_{e,d} = \langle \bar{5}_H \rangle (\mu_{10})^{-1} \langle 1_H \rangle$$

⇨ 2種の ϕ_i におけるVEVは同じ構造を持たねばならない

- では，FCNC問題は？

$$M_f = \langle \bar{5}_H \rangle (M_F)^{-1} \langle 1_H \rangle$$

$$\langle \bar{5}_H \rangle \sim 10^2 \text{ GeV}$$

$$M_F \sim 10^n \text{ GeV}$$

$$\langle 1_H \rangle \sim 10^{n-2} \text{ GeV}$$

$$\overline{(\bar{5}_L)} Y_{e,d}^{eff} 10_L \bar{5}_H = \overline{(\bar{5}_L)} \left(\bar{5}_H M_F^{-1} \langle 1_H \rangle \right) 10_L$$

$$\sim 10^{-2} \overline{(\bar{5}_L)} \bar{5}_H 10_L$$

てごろに抑制できる！

3.2 新たな粒子群の登場 --- GUT の放棄？

・ 立場A:

もともとGUTで統一的に成功した例は少ない

⇒ GUTでなくてもいいと居直る

・ 立場B:

M_F を10^{14} GeV 程度に選ぶ

⇒ 近似的にGUTを実現

・ 立場C:

$SO(10) \to SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_{PS}$ model

⇒ M_R の自由度有り！

3.3 Y_f にも構造を持ち込まざるを得ない

このまま($Y_f = y_f 1$)では，すべてのM_f は対角型

⟹ Y_e以外は構造を持つ

Koide-Fusaoka:

Democratic Universal Seesaw Model

$$M_q = M_e^{1/2} M_Q^{-1} M_e^{1/2}$$

M_e: diagonal

M_Q : unit matrix + democratic

Z.Phys C71, 495 (1996); PTP 97, 459 (1997)

M_Q を　S_3 不変な質量項

$$(M_Q)_{ij} = M_Q \left(\mathbf{1}_{ij} + 3b_F X_{ij}\right),$$

where

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と仮定

$$b_Q \simeq -e^{i\beta} \quad (\beta \simeq 20^\circ), \qquad b_U \simeq -\frac{1}{3}$$

のときよい結果を与える

（注） b_U = - 1/3 のとき det M_U=0

⟹ up-quark masses の１つにはseesaw mechanismが働かない！

$m_t \sim M_{weak}$

Z.Phys C71, 495 (1996)

$$\frac{m_u}{m_c} \simeq \frac{3m_e}{4m_\mu}$$

$$\frac{m_c}{m_b} \simeq 4\frac{m_\mu}{m_\tau}, \quad \frac{m_d m_s}{m_b^2} \simeq 4\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2}, \quad \frac{m_u}{m_d} \simeq 3\frac{m_s}{m_c} \simeq 3\left|\sin\frac{\beta}{2}\right|$$

4　課題A:ヒグスポテンシャルと対称性

4.1 動機

U(3): YK, MPL (1990); YK & Tanimoto, ZP C72 (1993) ;

S_3: YK, PRD 60, 077301 (1999)

We assume an S_3 invariant Higgs potential

$$V = \mu^2 \sum_i (\overline{\phi}_i \phi_i) + \frac{1}{2}\lambda_1 \left[\sum_i (\overline{\phi}_i \phi_i) \right]^2 + \lambda_2 (\overline{\phi}_\sigma \phi_\sigma)(\overline{\phi}_\pi \phi_\pi + \overline{\phi}_\eta \phi_\eta), \quad (4.1)$$

where

Singlet of S_3

$$\phi_\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \qquad (4.2)$$

Doublet of S_3

$$\phi_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_2)$$
$$\phi_\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3) \qquad (4.3)$$

V についての極小条件

$$\mu^2 + \lambda_1 \sum_i |v_i|^2 + \lambda_2(|v_\pi|^2 + |v_\eta|^2) = 0 \quad (4.4)$$

$$\mu^2 + \lambda_1 \sum_i |v_i|^2 + \lambda_2 |v_\sigma|^2 = 0 \quad (4.5)$$

$$|v_\sigma|^2 = |v_\pi|^2 + |v_\eta|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \quad (4.6)$$

従って

$$|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 = |v_\pi|^2 + |v_\eta|^2 + |v_\sigma|^2$$

$$= 2|v_\sigma|^2 = 2\left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad (4.7)$$

Potential (4.1) は S_3 invariant な一般形ではない

一般に S_3 invariant な fieldsの４乗項は４項

（ただし，**SU(2)L** を無視してのカウント）

$$V = \mu^2(\overline{\phi}_\pi\phi_\pi + \overline{\phi}_\eta\phi_\eta + \overline{\phi}_\sigma\phi_\sigma)$$
$$+\frac{1}{2}\lambda_\sigma(\overline{\phi}_\sigma\phi_\sigma)^2 + \frac{1}{2}\lambda_+(\overline{\phi}_\pi\phi_\pi + \overline{\phi}_\eta\phi_\eta)^2$$
$$+\frac{1}{2}\lambda_-(\overline{\phi}_\pi\phi_\eta - \overline{\phi}_\eta\phi_\pi)^2$$
$$+\lambda_2(\overline{\phi}_\sigma\phi_\sigma)(\overline{\phi}_\pi\phi_\pi + \overline{\phi}_\eta\phi_\eta) \quad (4.8)$$

しかるに Potential (4.1) は2項のみ

更に

S_3 invariance + Something

の仮定が必要

Potential (4.8)　からは

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{K}{3}(v_1 + v_2 + v_3)^2 \qquad (4.9)$$

$$K = 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_\sigma}{\lambda_2 - \lambda_+} \qquad (4.10)$$

付加的仮定

$$(\overline{\phi}_\sigma \phi_\sigma) \leftrightarrow (\overline{\phi}_\pi \phi_\pi + \overline{\phi}_\eta \phi_\eta) \qquad (4.11)$$

4.2 Broken S_3 Symmetry

荷電レプトンの質量スペクトルは S_3対称性だけでは説明がつかない

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{6}}$$

$$z_2 = \frac{2+\sqrt{1-\varepsilon}-\sqrt{3}\sqrt{1+\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$$

$$z_3 = \frac{2+\sqrt{1-\varepsilon}+\sqrt{3}\sqrt{1+\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$$

$$\varepsilon \to 0$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(4.12)

(4.13)

$$\varepsilon = 0.079072$$

S_3対称性の破れの導入が必要

- **Breaking term of the S_3 Symmetry**

$$V_{SB} = \lambda_{SB} \left[\xi_\pi (\overline{\phi}_\pi \phi_\pi) - \xi_\eta (\overline{\phi}_\eta \phi_\eta) \right]^2 \tag{4.14}$$

このとき

$$|v_\sigma|^2 = |v_\pi|^2 + |v_\eta|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \tag{4.15}$$

$$\frac{v_\pi^2}{v_\eta^2} = \frac{\xi_\eta}{\xi_\pi} \tag{4.16}$$

The relation (1.6) and the value ε are independent of the value λ_{SB} .

この破れは最初から存在すると考える

もし unification scale で m_e=0 なら

low energy scale でも m_e=0 であるから.

直接的破れなので,

massless scalar は登場しない

1つの scalarの質量は λ_{SB} に比例する

4.3　S_3 固有状態の再定義

今までの定義

$$
\begin{aligned}
\phi_\pi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_2) \\
\phi_\eta &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3) \\
\phi_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

新しい定義

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\phi}_\pi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 - \phi_2) \\
\widetilde{\phi}_\eta &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\phi_3 + \phi_2 - 2\phi_1) \\
\widetilde{\phi}_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_3 + \phi_2 + \phi_1)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_\pi \\ \tilde{\phi}_\eta \\ \tilde{\phi}_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\pi \\ \phi_\eta \\ \phi_\sigma \end{pmatrix}$$

z-parametersの値

$$z_\pi = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{1-\varepsilon} - \sqrt{1+\varepsilon}\right)$$
$$z_\eta = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}\right)$$
$$z_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{z}_\pi = \frac{1}{2}\sqrt{1+\varepsilon}$$
$$\tilde{z}_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{1-\varepsilon}$$
$$\tilde{z}_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V_{SB} = \lambda_{SB} \left[\xi_\pi (\overline{\widetilde{\phi}}_\pi \widetilde{\phi}_\pi) - \xi_\eta (\overline{\widetilde{\phi}}_\eta \widetilde{\phi}_\eta) \right]^2$$

$$\frac{v_\pi^2}{v_\eta^2} = \frac{\xi_\eta}{\xi_\pi} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\xi_\eta - \xi_\pi}{\xi_\eta + \xi_\pi}$$

$$\Rightarrow \ \xi_\eta = 1 + \varepsilon, \quad \xi_\pi = 1 - \varepsilon$$

- 従って, S_3 Symmetry に加えて,

$\widetilde{\phi}_\pi \leftrightarrow \widetilde{\phi}_\eta$ Symmetry with a small viotation

を考えればよい

余談：本当にあの公式は「a low energy scale で成立すべき」ものであったのか？

$$R(\mu) = \frac{\frac{2}{3}(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3})^2}{m_1 + m_2 + m_3} \equiv 1 - e(\mu)$$

Observed values:	$e = 0.000002^{+0.000024}_{-0.000022}$	
At $\mu = m_Z$:	$e = 0.001876^{+0.000026}_{-0.000023}$	
At $\mu = 10^9$ GeV:	$e = 0.001877^{+0.000008}_{-0.000024}$	
At $\mu = 2 \times 10^{16}$ GeV:	$e = 0.001877^{+0.000008}_{-0.000024}$	
At $\mu = 10^9$ GeV:	$e = 0.002272^{+0.000031}_{-0.000020}$	(SUSY)
At $\mu = 2 \times 10^{16}$ GeV:	$e = 0.002554^{+0.000025}_{-0.000026}$	(SUSY)