附 録 II　ゲージ理論とヒグス機構

最新の素粒子物理学を紹介しようとするとき，ゲージ理論とヒグス機構の紹介を欠くわけには行かない．ところが，この両者とも，それを正しく理解するには高度な「場の理論」の知識を必要とする.「場の理論」の紹介は，本書の目的外でもあり，また簡単に部分的な紹介という訳にも行かない．きちんとした体系的な勉学を必要とする．そうは言っても，例えば 3.4 節の話を理解してもらうためには，ある程度「ゲージ理論」や「ヒグス機構」に具体的イメージを持っていてもらう方が望ましい．そこで，無理を承知で，あえてごく大ざっぽな紹介を試みる．

A. ラグランジアン形式

「場 (feild)」として古くから知られているものに電磁場 (electromagnetic fields)[1]がある．電場 $\mathbf{E}$，および磁場 $\mathbf{H}$ は，空間 (および時間) のあらゆる場所に分布していて，あるときは波 (電磁波や光波など) のようにふるまい，またあるときは粒子 (「光子 (photon)」のようにふるまう．また，この $\mathbf{E}$ や $\mathbf{H}$ が媒介することによって，物質粒子の間に電気力 (クーロン力) や磁気力が現れる．

現代物理学では，ありとあらゆる基本粒子に対して，それぞれ「場」(例えば ϕ_a ($a=1,2,\cdots$ と書く) を考える．この ϕ_a は時間および空間座標 x の関数であり，$\phi_a(x)$ とも書く．ここで x は

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \ , \tag{A1}$$

のことであり，時間 t と空間座標 (x,y,z) とをセットにして扱う相対性理論の記法である (c は光速)．$(A1)$ で，例えば x^2 とあるが，これは「x の 2 乗」の意味ではなく「空間座標の第 2 軸」を意味する．このようなまぎらわしい記号を使うのは，相対性理論では「$(A1)$ に定義した座標 x^μ に対して，これに共変な (covariant) 座標 x_μ」

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \ , \tag{A2}$$

[1]electric fields および magnetic field を，中学・高等学校の教科書では「電界」および「磁界」とそれぞれ訳がなされている．歴史的ないきさつもあるだろうが，現代においては,「電場」,「磁場」の統一用語に従うべきである．

も登場し，これと区別するためである．

各「場」のふるまいは，場の方程式によって，規定される．あるいは，ラグランジアン (Lagrangian) というものを与えることによって決まる．逆に言えば，素粒子物理学の目的は，いろいろな基本粒子のふるまいを実験的に調べることによって，自然界の根源の法則を与えるところの，このラグランジアンがどう与えられているのかを知ることにあると言ってもよい．

ラグランジアンなる量は，古典力学では

$$(\text{ラグランジアン}) = (\text{運動エネルギー}) - (\text{位置エネルギー})$$

で与えられる．場の理論におけるラグランジアンもこれに対応すると考えてよい．例えば，自由に運動している (即ち他の粒子との相互作用のない) スピンゼロ (かつ荷電ゼロ) の粒子の場 $\phi(x)$ は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi\phi) \ , \tag{A3}$$

で与えられる．ここで，$\partial_\mu \phi$ と言う記号は，場の理論で使われる簡略記号で，

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \ , \tag{A4}$$

を表し，また，同じ μ の添字が上下に 2 つ現われたら

$$A_\mu B^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu B^\mu = A_0 B^0 - \mathbf{AB} \tag{A5}$$

のことと読む [ここで，$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$ に注意]．(A3) の右辺第 1 項が運動エネルギーに対応し，第 2 項がポテンシャル (位置エネルギー) に対応する．

この $\mathcal{L}$ が与えられると，運動方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\right) = 0 \tag{A6}$$

から求まる．この方程式をラグランジの方程式とも呼ぶ．

[参考] 場の運動方程式

この運動方程式 (A6) は，次のようにして求まる．一般に $\mathcal{L}$ は，場の量 $\phi_a(x)$ ($a = 1, 2, \cdots$) とその時間・空間微分 $\partial_\mu \phi_a$ の関数で与えられる．厳密には $\mathcal{L}$ を空間積分したもの

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \ , \tag{A7}$$

(d^3x とは $d^3x = dxdydz$ のこと) のことをラグランジアンと呼び，$\mathcal{L}$ はラグランジアン密度と呼ぶべきであるが，素粒子物理学ではしばしば $\mathcal{L}$ のことを，単にラグランジアンと呼ぶことが多い．また，$(A7)$ を時間積分したもの

$$I = c\int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int d^4x\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) \ , \tag{A8}$$

($d^4x \equiv dx^0dx^1dx^2dx^3 = cdtdxdydz$) を,「作用 (action)」と呼ぶ.

今，ある場 ϕ_a が仮想的に $\phi_a \to \phi_a + \delta\phi_a$ と変化したとすると，I は

$$\delta I = \int d^4x\delta\mathcal{L} = \int d^4x\sum_a\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta(\partial_\mu\phi_a)\right] \ , \tag{A9}$$

なる変化を起こす．ここで，$\mathcal{L}$ は ϕ_a と $\partial_\mu\phi_a$ の関数であることを用いた．$\partial_\mu\phi_a$ とは，$\partial\phi_a/\partial x^\mu$ のことであるから，

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta(\partial_\mu\phi) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right) - \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right]\delta\phi_a \ , \tag{A10}$$

を用いて，

$$\delta I = \int d^4x\sum_a\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\right]\delta\phi_a + \int d^4x\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right) \ , \tag{A11}$$

と書ける．$(A11)$ の最後の項は，4 次元空間のガウスの定理を用いると 3 次元空間の表面積分へと変形ができ，十分大きな閉曲面 (従って十分遠方での面) での積分をとることにより，ゼロと見なすことができる．作用 I は仮想変化 $\delta\phi_a$ に対して不変 $\delta I = 0$ であることを要請すると，方程式 $(A6)$ が得られる．

[参考] 電磁場の方程式

例として電磁場 $A_\mu(x)$ について見る．ラグランジアンは次のように与えられる．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eA_\mu j^\mu \ . \tag{A12}$$

ここで，

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ , \tag{A13}$$

従って $(A12)$ は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu) + A_\mu j^\mu \ , \tag{A14}$$

とも書ける．

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = -F^{\mu\nu} \tag{A15}$$

であるから，ラグランジの方程式 $(A6)$ より

$$-j^{\nu}+\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}F^{\mu\nu}=0\ , \tag{A16}$$

を得る．j^{μ} とは 4 次元電流密度のことであり

$$j^{\mu}=(\rho,j_x,j_y,j_z)\ , \tag{A17}$$

(ρ は荷電密度)，また $F^{\mu\nu}$ とは

$$(F^{10},F^{20},F^{30})=(E_x,E_y,E_z) \tag{A18}$$

$$(F^{23},F^{31},F^{12})=(-H_x,-H_y,-H_z) \tag{A19}$$

のことである．なぜなら電場 $\mathbf{E}$，磁場 $\mathbf{H}$ はスカラーポテンシャル A_0 とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とから，

$$\mathbf{E}=-\nabla A_0-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\ , \tag{A20}$$

$$\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{A21}$$

で与えられる量であり，それぞれ

$$\begin{aligned}E_x=E^1=F^{10}&=\partial^1A^0-\partial^0A^1=-\partial_1A^0-\partial_0A^1\\&=-\frac{\partial A_0}{\partial x^1}-\frac{1}{c}\frac{\partial A^1}{\partial t}=-\frac{\partial A_0}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\ ,\end{aligned} \tag{A22}$$

$$\begin{aligned}H_x=H^1=-F^{23}&=-(\partial^2A^3-\partial^3A^2)=\partial_2A^3-\partial_3A^2\\&=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=(\nabla\times A)_x\ ,\end{aligned} \tag{A23}$$

と書けるからである．このことを用いると，$(A16)$ の $\nu=0$ の場合は

$$-j^0+\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}F^{\mu 0}=0\Rightarrow-\rho+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}E^k=0 \tag{A24}$$

となり，良く知られたマックスウェルの方程式

$$\nabla\mathbf{E}=\rho \tag{A25}$$

を与え，また $\nu=1,2,3$ の場合は

$$-j^1+\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}F^{\mu 1}=0$$

$$\Rightarrow j^1 = \frac{\partial}{\partial x^0}F^{01} + \frac{\partial}{\partial x^2}F^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3}F^{31}$$

$$\Rightarrow j_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial Z} \ , \tag{A26}$$

などとなるので，マックスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \ , \tag{A27}$$

を得る．(但し，単位系は高校の教科書に表われる MKS 単位系ではない．この単位系はヘビサイド・ローレンツ有理化単位系 (Heaviside-Lorentz rationalized units) と呼ばれる．)

なお，マックスウェルの 4 つの基礎方程式の内の残りの 2 つについては，次の関係式から得られる．$F^{\mu\nu}$ の定義 ($A13$) より，互いに異なる 3 つの添字 $\mu, \nu, \lambda\ (= 0, 1, 2, 3)$ について，

$$\begin{aligned} &\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} \\ &= \partial^\mu(\partial^\nu A^\lambda - \partial^\lambda A^\lambda) + \partial^\nu(\partial^\lambda A^\mu - \partial^\mu A^\lambda) + \partial^\lambda(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A28}$$

が必ず成立する．従って，$(\mu, \nu, \lambda) = (1, 2, 3)$ の場合は，

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \nabla \mathbf{H} = 0 \ , \tag{A29}$$

を与える．また $(\mu, \nu, \lambda) = (0, 1, 2)$ と置けば，

$$\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0$$

$$\Rightarrow -\partial_0 H^3 - \partial_1 E^2 + \partial_2 E^1 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \tag{A30}$$

を得る．

このように，$\mathcal{L}$ の形を具体的に与えることによって，場の方程式 (従って，その場によって記述される粒子の性質・ふるまい) は，決まってしまう．

B. ゲージ理論

電磁場の基礎方程式 (マックスウェルの方程式) を与えるラグランジアンには，($A12$) に見るように，物質との相互作用を与える項 (第 2 項) $eA_\mu j^\mu$ を別とすれば，必ず ($A13$) で定義される $F_{\mu\nu}$，即ち，

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \ , \tag{B1}$$

の形でのみ理論の中に登場する．従って，電磁場 $A_\mu(x)$ に対して，

$$A_\mu(x) \Rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \theta(x)}{\partial x^\mu} \ , \tag{B2}$$

なる変換を行っても，

$$F_{\mu\nu} \Rightarrow F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x^\mu} = F_{\mu\nu} \ , \tag{B3}$$

となって，理論は不変である．

一方，荷電物質の場の運動方程式を与えるラグランジアンは，例えば電子の場合は，

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \ , \tag{B4}$$

で与えられる[2]．これに対して，

$$\psi(x) \Rightarrow \psi'(x) = e^{ie\theta(x)}\psi(x) \ , \tag{B5}$$

なる変換を考えてみる．$\overline{\psi}(x)$ についての説明は略すが，$\overline{\psi}(x)$ は $\psi(x)$ の複素共役な量に対応し，($B5$) の変換に除して

$$\overline{\psi}(x) \Rightarrow \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x)e^{-ie\theta(x)} \ , \tag{B6}$$

なる変換を受ける．従って，$\overline{\psi}\psi$ はこの変換のもとで不変量である．しかし，$\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ は，微分を含んでいるので，($B5$) の θ が x の関数である限り

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \Rightarrow \frac{\partial \psi'}{\partial x^\mu} = e^{ie\theta}\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + ie\frac{\partial \theta}{\partial x^\mu}\psi \ , \tag{B7}$$

となるので，不変量とはなれない．そこで，物質場 $\psi(x)$ にかかる微分 ∂_μ を

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(x) \tag{B8}$$

[2] ここで，$\psi(x)$ は，4 成分を持つスピノルという量であり，γ^μ ($\mu = 0,1,2,3$) はガンマー行列と呼ばれる $\overline{\psi}$ は $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ ($g^{00} = 1$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$ 他はゼロ) を満たす 4×4 行列である．また，$\overline{\psi}$ は $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ で定義される量である．しかし，ここではこれ以上の解説は割愛する．

で定義される「共変微分」というものに置き換えてやることにする：

$$\mathcal{L}_{\psi A} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$
$$= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + eA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu \psi \ . \tag{B9}$$

このラグランジアン $\mathcal{L}_{\psi A}$ は，変換 $(B2)$ および $(B5)$ のもとで，

$$\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \Rightarrow \overline{\psi}'\gamma^\mu \partial_\mu \psi' = \overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \theta)\overline{\psi}\psi \ , \tag{B10}$$

$$-ieA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu \psi \Rightarrow -ieA'_\mu \overline{\psi}'\gamma^\mu \psi' = -ie(A_\mu + (\partial_\mu \theta))\overline{\psi}\gamma^\mu \psi \ , \tag{B11}$$

であるから，不変量となる．

変換 $(B2)$ および $(B5)$ の変換のことを「ゲージ変換 (gauge transformation)」と呼ぶ．ゲージ変換のもとで，電磁場の自由ラグランジアン (他の粒子と相互作用のないラグランジアン)

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{B12}$$

は不変であるが，物質場の自由ラグランジアン $\mathcal{L}_\psi$，$(B4)$，は不変とはならない．$\mathcal{L}_\psi$ の中の微分 ∂_μ を $(B8)$ で定義される D_μ に置き換えてはじめて，理論全体

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{\psi,A} \tag{B13}$$

が，ゲージ変換のもとで不変となる．言い換えれば，理論がゲージ変換のもとで不変であることを要求すると，(電子場 + 電磁場) のラグランジアンは，各々自由粒子を表すラグランジアン $\mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_F$ だけではだめで，必ず $(B13)$ の形，即ち

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_\psi + eA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu \psi \tag{B14}$$

の形でなければならない．$\overline{\psi}\gamma^\mu \psi$ は 4 次元電流 j^μ に相当する量であり，($(B12)$ を見よ)，ゲージ不変の要求によって，物質と電磁場の相互作用の存在 $eA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu \psi$ が規定されたと言える．

同様な考え方を，$SU(n)$ 対称性を持つ n 成分の場 $\psi_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ に対し適用する．(2.29) と同じように

$$\psi_\alpha(x) \Rightarrow \psi'_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^{n} U(x)_{\alpha\beta}\psi(x)_\beta \ , \tag{B15}$$

なる変換を考える．(2.33) で述べたように，この変換行列 U は，

$$U^\dagger(x)U(x) = 1\ , \tag{B16}$$

の条件を満たす．具体的には

$$U(x) = e^{ig\sum_a \theta_a(x)\lambda_a}\ , \tag{B17}$$

で与えられる．ここで λ_a は，群のジェネレーター (generators) と呼ばれる (n^2-1) 個の $n\times n$ 行列であり，$\lambda_a^\dagger = \lambda_a$ の性質を持つ．更に詳しく言うと，λ_a は

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\lambda_a)_{\alpha\alpha} = 0 \tag{B18}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\lambda_a\lambda_b)_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{B19}$$

を満たすように定義されている．(δ_{ab} は，クロネッカーのデルタ記号と呼ばれ，$a\neq b$ のとき $\delta_{ab}=0$ と定義されている数学記号).

U が (従って θ が) 座標 x を含まないとき (そのような場合を「グローバル (global) 対称性と呼ぶ)，物質場 ψ_a の自由ラグランジアンはそれのみで不変となることができるが，U (従って θ) が x の関数である場合 (このような場合を「局所 (local)」対称性と呼ぶ)，($B7$) と同じような理由で，物質場の自由ラグランジアンはこの変換 ($B15$) に対して不変でなくなる．しかし，($B8$) と同じようにして微分 ∂_μ を

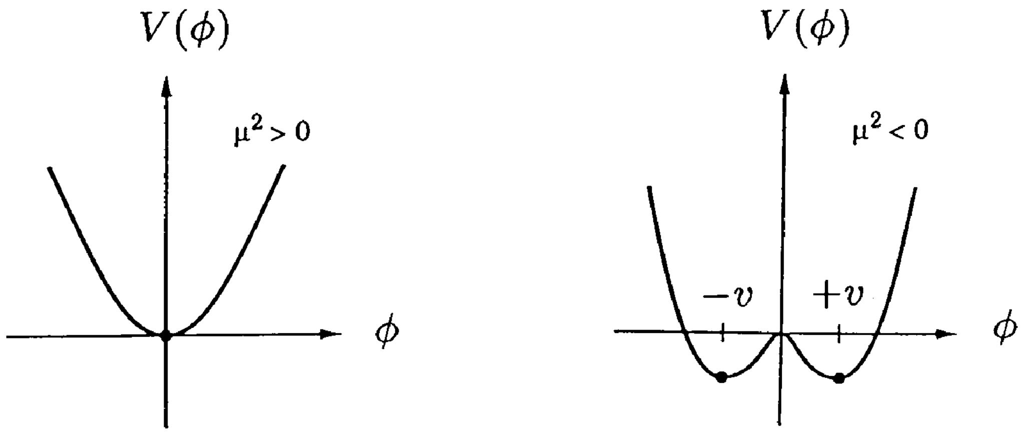
$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig\sum_{a=1}^{n^2-1} A_\mu^a(x)\lambda_a \tag{B20}$$

で置き換えてやると理論全体を不変にすることができる．このように，$SU(n)$ の局所対称性を要求すると，即ち，ゲージ変換 ($B15$) のもとで不変であることを要求すると，物質場 $\psi(x)$ と相互作用を行う (n^2-1) 個の成分を持つスピン・パリティ $J^P = 1^-$ の場 $A_\mu^a(x)$ $(a=1,2,\cdots,n^2-1)$ の存在が要求されることになる．

このような考え方で，物質間の力を媒介する役割を持つ粒子 (ゲージボゾン) を導入する理論を,「ゲージ理論」と呼ぶ．今日の素粒子物理学では，基本粒子に働く力はすべてこのような考えで理解されるという立場が，主流的である．

C. ヒグス機構

一般に，ゲージ理論によって導入された粒子 (ゲージボゾン) は，質量がゼロである．しかし，考えているその対称性が自発的に (spontaneously) 破れたとき，対応するゲージボゾンは質量を持つことがきでる[3]．そのようなメカニズムを「ヒグス機構 (Higgs mechanism)」と呼ぶ．



(a) $\mu^2 > 0$ の場合　　(b) $\mu^2 < 0$ の場合

図 C1. ヒグスポテンシャル $V(\phi)$

自発的対称性の破れとは，次のような場合を言う．ラグランジアンそのものは，厳密にその対称性を満していているとする．そのラグランジアンの中で，ヒグス粒子と呼ばれているスピン・ゼロの粒子 ϕ のポテンシャル $V(\phi)$ が，

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^* \phi_\alpha + \frac{1}{4}\lambda(\sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^* \phi_\alpha)^2 \ , \qquad (C1)$$

で与えられているとする．$\mu^2 > 0$，$\lambda > 0$ のときは，$V(\phi)$ のグラフは，図 C1(a) のようになる．$V(\phi)$ の最小の場所 ($\phi = 0$ のところ) は，位置エネルギーが最少の場所であり，従って,「真空」のエネルギー状態と見なすことができる．これに対して，$\mu^2 < 0$,

[3]基本力を理解するためには，必ずしも「ゲージ理論」が唯一の立場ではない．まして，ゲージ粒子に質量を与える機構については，ヒグス機構以外の説もいろいろ考えられている．ヒグス機構にも，色々理論的諸問題が指摘されているが，他の機構となると，もっと色々な難点が指摘されている．現在のところ，ウィークボゾンの質量の起源として，ヒグス機構が，依然として一番有力な考え方であることには変わりはない．

$\lambda > 0$ のときは，$V(\phi)$ は図 C1(b) のようになり，$V(\phi)$ は

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\mu^2 + \lambda \sum_{\beta=1}^{n} \phi_\beta^* \phi_\beta\right) \phi_\alpha^* = 0 \ , \tag{C2}$$

からも分かるごとく，

$$\phi_\alpha = \pm v \equiv \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \ , \tag{C3}$$

で最小値を取る [1 つの ϕ_α のみ $(C3)$ を満し，他はゼロとする．以後，それを $\alpha = n$ とし，$\phi_n = v$，$\phi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n-1)$ と選ぶこととする]．即ち，真空状態を $\phi_\alpha = 0$ ではなく，$\phi_n = v$ のところへと定義を変更しなければならない．新しく定義された真空で場の量がゼロとなるように $\phi(x)$ を定義しなおせば

$$\begin{aligned} &\phi_\alpha(x) \Rightarrow \phi'_\alpha(x) = \phi_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n-1) \\ &\phi_n(x) \Rightarrow \phi'_{(x)} = \phi_n(x) - v \end{aligned} \ , \tag{C4}$$

となる．この真空の再定義により，本来は対称性を満していた理論が，$\phi'(x)$ で記述された実際の物理現象に対しては対称性を満さなくなってしまう．このようなメカニズムで起こる対称性の破れを自発的対称性の破れと言う．

具体的に，$(C1)$ で与えた $V(\phi)$ を見てみよう．$(C4)$ の関係を使って，ϕ_α を消去して ϕ'_α と v のみで書けば

$$\begin{aligned} V = &\frac{1}{2}\mu^2 \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^{*'} \phi'_\alpha + v\phi'_n + v\phi_n'^* + v^2\right) \\ &+\frac{1}{4}\lambda \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^{*'} \phi'_\alpha + v\phi'_n + v\phi_n^{*'} + v^2\right)^2 \\ = &\frac{1}{4}(2\mu^2 + \lambda v^2)v^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 + \lambda v^2)v(\phi'_n + \phi_n^{*'}) \\ &+\frac{1}{2}(\mu^2 + \lambda v^2)\sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^{*'} \phi'_\alpha + \frac{1}{4}\lambda v^2(\phi'_n + \phi_n^{*'})^2 \\ &+\frac{1}{4}\lambda \left[2v(\phi'_n + \phi_n^{*'}) \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^{*'} \phi'_\alpha + (\sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^{*'} \phi'_\alpha)^2\right] \\ = &-\frac{1}{4}\lambda v^4 + \frac{1}{4}\lambda v^2(\phi'_n + \phi_n'^*)^2 + \frac{1}{4}\lambda \left[2v(\phi'_n + \phi_n^{*'}) \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^{*'} \phi'_\alpha + (\sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^{*'} \phi'_\alpha)^2\right] \end{aligned} \tag{C5}$$

となる．ここで最後の式変形では $\mu^2 + \lambda v^2 = 0$ なる関係 $(C3)$ を用いた．($(C5)$ において定数項 $-\frac{1}{4}\lambda v^4$ は，ポテンシャルエネルギーゼロの位置を再定義することによって

消去できる．第 2 項は，質量項に対応し，初めのポテンシャル $(C1)$ では $2n$ 個のボソン[4]がすべて μ^2 の質量を持っていたのに，$(C5)$ の表現では，その内の 1 成分

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi'_n + \phi^{*\prime}_n) \tag{C6}$$

のみが

$$m_H^2 = \lambda v^2 \tag{C7}$$

の質量を持ち，他の $(2n-1)$ 個のボソンは質量ゼロとなる．このようにして，$(C5)$ の表現は明かに $SU(n)$ 対称性を破っている．

ヒグス粒子 ϕ_α とゲージ粒子 A_μ の相互作用は，ϕ_α の運動エネルギー項 ($(A3)$ の第 1 項)

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} \partial_\mu \phi^*_\alpha \partial^\mu \phi_\alpha \tag{C8}$$

にゲージ不変性を要求して修正した項 (∂_μ を $(B18)$ の D_μ に置き換えた式)

$$\mathcal{L}_{\phi,A} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha-1}^{n}\left[\partial_\mu\phi^*_\alpha + ig\sum_\beta\sum_a \phi^*_\beta(\lambda_a)_{\beta\alpha}A^a_\mu\right]\left[\partial^\mu\phi_\alpha - ig\sum_\beta\sum_a(\lambda_a)_{\alpha\beta}A^{a\mu}\phi_\beta\right] \tag{C9}$$

から得られる．$(C9)$ の ϕ を $(C4)$ で定義される ϕ' と v で書き直し，v^2 の項を書き出すと

$$\frac{1}{2}g^2\sum_\alpha\sum_a\sum_b v(\lambda_a)_{n\alpha}(\lambda_b)_{\alpha n} v A^a_\mu A^{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^2v^2\sum_a\sum_b(\lambda_a\lambda_b)_{nn}A^a_\mu A^{b\mu} \tag{C10}$$

と書ける．詳しい説明は略すが，$(B19)$，$(B20)$ を満す λ_a の内で，$(\lambda_a\lambda_b)_{nn}$ がゼロでない値を与える $\lambda_a\lambda_b$ の組み合せは，$a=b$ の場合で，かつ λ_a が

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{C11}$$

[4] ϕ は n 成分からなる複素場であり，実数の場の言葉で言えば，$2n$ 成分を持つことになる．

なる $2(n-1)$ の行列の場合と

$$\frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{pmatrix} \tag{C12}$$

の計 $(2n-1)$ 個に限られる．従って，これらの行列 λ_a に附随するゲージ場 A_μ^a のみがゼロでない質量を持つことになる．(もっと詳しい計算をすれば，$(C5)$—$(C7)$ で紹介した $(2n-1)$ 個の質量ゼロのヒグスボゾン ϕ_α は，(C11)—(C12) に対応してゼロでない質量を持つ $(2n-1)$ 個ゲージボゾン A_μ^a に吸収されて，物理的に実在する粒子としては登場しないことがわかる．)

このシナリオを $SU(2)$ 対称性に適用すれば，4 個のヒグス粒子の成分の内，1 個のみがゼロでない質量を持つ粒子として物理的ふるまいを行い，他の 3 個は，$SU(2)$ ゲージ対称性の要求から存在を要求される 3 個のゲージボゾンに吸収され，それらにゼロでない質量を持たせる役割を持つ．このようにして質量を得たのが，弱い相互作用を媒介する 3 個のウィークボゾン $W^{\pm}$，Z^0 であると，考えられている．

自発的対称性の破れを引き起し，ゲージボゾンに質量を与える役割を担うヒグス粒子は，ここで考察したタイプ ϕ_α (群論の言葉で言うと，$SU(n)$ の基本表現) 以外にもいろいろ考えられる．例えば，$SU(5)$ 大統一理論では，$SU(5)$ の随伴表現 ((2.38) を参照) である 24 次元表現のヒグス粒子 ϕ_α^β $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, 5)$ を考え，これが 5×5 行列で表現されるとき，その各成分に対応した

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{C13}$$

の部分に，自発的対称性の破れが起こると考える．この場合は，$SU(5)$ ゲージ対称性

に伴って現れる 24 個のゲージボゾンの内，5×5 行列で表現すると，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C14}$$

と並んだ中で，$*$ で示した所のゲージボゾンのみがゼロでない質量を持つ．$(C14)$ で 0 と表示されている 3×3 行列部分と 2×2 行列部分に対応するゲージボゾンは，まだ質量ゼロのままである．このことは，各々の部分に対応する $SU(3)$ 対称性と $SU(2)$ 対称性は，まだ破れないままで残っていることを意味する．即ち，$(C13)$ のタイプで自発的対称性の破れが起こるとき，$SU(5)$ 対称性は $SU(3) \times SU(2)$ へと壊れることになる．