

0. 記号と定義

本文で用いられる記号の主要なものについて、その定義をあらかじめ以下に掲げる。

0.1 質量行列の対角化

質量行列 M_f に対して、その対角化された行列を D_f と書く。

$$(D_f)_{ij} = \delta_{ij} m_i^f. \quad (0.1)$$

M_f がエルミート型でない場合は、フェルミオン場 \bar{f}_L と f_R とではさまれたものを M_f と書き \bar{f}_R と f_L とではさまれたものを M_f^\dagger と書くことにする。即ち、

$$\bar{f}_L^0 M_f f_R^0 + \bar{f}_R^0 M_f^\dagger f_L^0. \quad (0.2)$$

ここで f^0 は、フェルミオン f の弱い相互作用での固有状態 (weak-interaction eigenstates) とする。よって、

$$(0.2) = \bar{f}_L D_f f_R + \bar{f}_R D_f^\dagger f_L = \bar{f} D_f f \quad (0.3)$$

($f = f_L + f_R$) となる。ここで、後に述べるように、一般に D が real elements を持つように M_f の対角化のためのユニタリ行列 U の位相を選ぶので、 $D^\dagger = D$ となっていることを用いた。

M の対角化のためのユニタリ行列 U の定義は、文献によって $UMU^\dagger = D$ と定義するものと、 $U^\dagger MU = D$ と定義するものがある。最近のニュートリノ混合を議論する論文では

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i \quad (0.4)$$

と混合行列 U を定義するものが多い。ここで ν_α ($\alpha = e, \mu, \tau$) はフレーバー固有状態 (flavor eigenstates) であり、 ν_i は質量固有状態 (mass eigenstates) である。本書では、この定義に習って、

$$f^0 = U_f f \quad (0.5)$$

と U を定義する。この定義では、質量行列 M_f の対角化は

$$U_{fL}^\dagger M_f U_{fR} = D_f, \quad (0.6)$$

と書かれる。

このような定義のもとでは、weak currents において、

$$J_\mu = \bar{u}_L^0 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d_L^0 = \bar{u}_L \gamma_\mu (1 - \gamma_5) V d_L, \quad (0.7)$$

で定義されるカビボ・小林・益川行列 V は

$$u_L^0 = U_{uL} u_L, \quad d_L^0 = U_{dL} d_L \quad (0.8)$$

より

$$V = U_{uL}^\dagger U_{dL}, \quad (0.9)$$

によって与えられる.

レプトンセクターにおいては,

$$\nu_L^0 = U_{\nu L} \nu_L, \quad e_L^0 = U_{eL} e_L \quad (0.10)$$

[e_i は荷電レプトン (e^-, μ^-, τ^-) を意味するものとする] である. (0.4) 式での ν_α は, M_e が対角化された系におけるニュートリノ状態であるから,

$$\begin{pmatrix} \nu_L^0 \\ e_L^0 \end{pmatrix} \rightarrow U_{eL}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_L^0 \\ e_L^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{eL}^\dagger \nu_L^0 \\ e_L \end{pmatrix}, \quad (0.11)$$

より, ニュートリノ混合行列 U は

$$U = U_{eL}^\dagger U_{\nu L}, \quad (0.12)$$

で与えられる.

0.2 弱電スケール

Electroweak theory において, $SU(2)_L$ 対称性の破れのエネルギースケール Λ_L を

$$\Lambda_L = \langle \phi_L^0 \rangle = 1/\sqrt{2}(\sqrt{2}G_F)^{1/2} = 174.1 \text{ GeV} \quad (0.13)$$

と定義する.

(注) Λ_L として, (0.13) の $\sqrt{2}$ 倍の値, $v \equiv \sqrt{2}\langle \phi_L^0 \rangle = 246.2 \text{ GeV}$ を用いるテキストもある.

1. はじめに

本論に入る前に、そもそも質量行列模型研究は何を目的に行われているのかなど、基本的な問題について概観しておきたい。

1.1 質量行列模型は何を目指しているか？

我々の最終目標は、クォークとレプトンの統一模型の構築にある。そのためには、単なる標準模型の $SU(3)_c \times U(1)_Y$ 対称性を場の理論的に矛盾なく何らかの統一群に埋め込んで安心をするというのではなく、もっと現実に観測されている量であるクォークとレプトンの質量スペクトルとフレーバー混合に着目して、これをリアリスティックに与えるようなモデルの探求の中から、統一理論への手がかりを得ることを狙っている。

このために、我々のアプローチを次のように区別すると便利である。

(1) 観測量の抽出と整理

質量行列に関連する物理量は、多くの場合、それは直接的な観測量ではない。クォーク質量もむろんそうであるし、カビボ・小林・益川行列 [1] (CKM 行列) もそうである¹。できるだけモデル依存性のない方法でこれら必要な物理量の値を実験から引き出す作業が重要な作業となる。また、得られたこれら観測量の間に、何かシンプルな経験則が見いだされるなら、それを定式化する。

(2) 質量行列の形態学的研究

特定のモデルや質量行列形を仮定したりすることなく、できるだけ一般的な議論から押さえることのできる質量行列と観測量の関係を議論する。例えば、3 世代 (家族) のみを仮定することによって出てくる結論を整理する。後述の Jarskog の rephasing invariant quantity [2] や、Branco-Lavoura-Mota の NNI form についての定理 [3] などが、このタイプの研究である。

また、一方で、特定のシンプルな形を仮定して、その場合は観測量の間にどのような関係式を与えるかを見ることもこのタイプの仕事となる。

(3) モデルに基づく現象論的な研究

ステップ (2) では、質量行列形に形を仮定しても、それはあくまで「暫定的に試しに置いてみる」程度の意味であったが、ここでは、その質量行列形を仮定する背景にもある程度の考えをめぐらすことによってモデル設定を行う。従って、単なる質量スペクトルと CKM 行列のパラメータ合わせだけでなく、そのモデルを設定することによって生じる副次的な物理は何かを考え、新しい物理現象の観測可能性にも立ち入った議論を展開する (例えば、FCNC, 新粒子, 等の観測など)。

(4) 本質的な問題への取組み

ステップ (3) で用いられたモデルや仮説のより根源的な背景 (法則性) を追求する。例えば、CP の破れのオリジンや、家族 (世代) というものの根源的理解を探究する。

¹例えば、CKM 行列要素 $|V_{ij}|$ の抽出には、フォームファクター (form factor) や崩壊定数 (decay constant) の計算が必要となる。

これら4つのステップは、一般には(1)→(2)→(3)→(4)の順序で進むであろうけれど、必ずしも、例えば、(1)の研究が終了しなければ(2)へ進んではならないと言ったものではない。(1),(2)の段階を終わることなく、ステップ(3)へ入ることも可能であろう。あくまでも、現在の研究段階が、(1)-(4)の各々についてどの程度進んでいるかを見ることが重要である。それについては次節に概観する。

1.2 研究発展段階の現状

前述の研究ステップ(1)-(4)についての、現在のところの研究の状況を、表1.1にまとめる。

表 1.1 研究発展段階の現状 (1998年現在)

	Quarks	Leptons
実験	Rare K decays B -factory ⇒ 精密測定	m_ν の直接測定 $\beta\beta$ decay ν -osc の探索 太陽, 大気, 加速器, reactor, ...
(1) 実験から 物理量の描出	$m_q(\mu)$ の再計算 CKM 行列 $ V_{us} , V_{cb} , V_{ub} , V_{td} ,$ triangle は閉じるか? Form factors, B -values	$\Delta m_{\nu ij}^2, \sin^2 2\theta_{ij}$
(2) 形態学	特定の形を前提としない分析 Branco-Lavoura-Mota Jarlskog 特定の形を前提とした分析 Hierarchical type Democratic type Seesaw type	特定の形を前提としない分析 Minakata, Yasuda, Fogli <i>et al.</i> 特定の形を前提とした分析
(3) モデル	Horizontal $U(1)$ Symmetry String-inspired model Composite model	
(4) 本質的な問題	Generations (Families) の起源 質量の起源: Higgs, TC, ... quarks と leptons は同一レベルで統一されるべきか?	

クォーク質量行列の研究では、(1),(2)についてはほぼ終了し、(3),(4)の段階に入っていると見てよい。

レプトン、特に、ニュートリノ質量行列については、(1)の段階の研究はここ1~2年急

速に進展しては来たものの、まだやるべきことは残っている。(更なる実験待ちという面もある。その意味では、(1)を残したまま、(2)へ取り組むのも悪くはない。) また、(2)についてはかなりいろいろの試みはなされているものの、まだこれからというところ。もう少し、(1)についての仕事が進まない、(2)も進まないという面がある。(3)に至っては、全くの入り口状態であり、今後の研究を待たねばならない。

クォークとレプトンの統一という観点からの研究は、(2)、(3)について、いくらかの試みはなされてはいるものの、研究最盛期はこれからであろう。特に、ステップ(4)の研究が本格化するためには、やはりクォークとレプトンの統一という観点に立った(3)、(4)の研究がもう少し進展する必要があると思われる。現状ではまだステップ(4)へ取り組むための手がかりがまだ十分ではないように思える。

1.3 現象論的質量行列模型屋は何を求めれば満足か？

質量行列模型研究は、観測された質量スペクトルやフレーバー混合を手がかりに研究を進めて行くわけだが、当然「現象論的研究」というスタイルが重要な役割を示す。特に、「現象論的質量行列模型」を論ずる作業が、前述のステップ(2)に登場する。この研究手法に対してしばしば以下に述べるような誤解がなされることがある。この点について言及しておくことは、質量行列模型研究の全体の流れを理解する上でも有益であると思われるので、以下に「現象論的質量行列模型」屋は何を目指しているのかについて論じたい。

よく受ける誤解とは「彼等は、現象(実験値)をぴったり記述する質量行列さえ求めればそれで満足なのだろう」という見方である。これは明らかに誤りである。

クォーク質量行列 (M_u, M_d) に対して、

$$U_{uL}^\dagger M_u U_{uR} = D_u, \quad (1.1)$$

$$U_{dL}^\dagger M_d U_{dR} = D_d,$$

$$V = U_{uL}^\dagger U_{dL}, \quad (1.2)$$

によって、観測量である質量 D_u, D_d 、およびCKM行列 V を求めることができる。今、誰かが、これら観測量 D_u, D_d, V をぴったりと与える質量行列 (M_u, M_d) を見つけ出したとする。従って、(1.1)、(1.2)が成立する。しかし、この (M_u, M_d) に対して、

$$M'_u = A^\dagger M_u B_u,$$

$$M'_d = A^\dagger M_d B_d, \quad (1.3)$$

(A, B_u, B_d は任意のユニタリ行列) なる関係を持つ別の質量行列のセット (M'_u, M'_d) もまた同じ観測量 D_u, D_d, V を与える。なぜなら、

$$U_{uL}^{\prime\dagger} M'_u U'_{uR} = (AU'_{uL})^\dagger M_u (B_u U'_{uR}),$$

$$U_{dL}^{\prime\dagger} M'_d U'_{dR} = (AU'_{dL})^\dagger M_d (B_d U'_{dR}), \quad (1.4)$$

であるから,

$$\begin{aligned} U'_{uL} &= A^\dagger U_{uL}, & U'_{uR} &= B_u^\dagger U_{uR}, \\ U'_{dL} &= A^\dagger U_{dL}, & U'_{dR} &= B_d^\dagger U_{dR}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

と見なせば, M'_u, M'_d の対角行列は (1.1) よりそれぞれ D_u, D_d となり, また, CKM 行列は

$$V' = U'^{\dagger}_{uL} U'_{dL} = U^\dagger_{uL} A^\dagger A U_{dL} = V, \quad (1.6)$$

となって同じ観測量を与える. このことは “rebasings” の自由度として知られている (詳しくは 3.2 節で解説).

このことは, 実験値をぴったり与えるクォーク質量行列 (M_u, M_d) のセットは無限個存在することを意味し, 従って, 「実験との一致」のみを目的として現象論的モデル探しをすることは意味がない. (むろん, 現象論的モデル探しで, 現象との数値合わせが全くうまく行かないようでもこれまた話にならない.)

純現象論的な質量行列モデルが, それなりの意義を持つと考えるためには, 次の条件がその判断基準となる.

- (a) その質量行列がうまく観測量との数値合わせができることは当然として, その数値合わせはできるだけ少ないパラメーター数のもとで行われていること.
- (b) その質量行列の形はできるだけシンプルで美しい形をしていることは当然のことながら, その形が何らかのより深い背景から出てくることを暗示させるようなものであること. (理論的なモデル設定ができるならなおよい.)

条件 (a) については, どこまで数値合わせができれば, それで「よい」とするかが問題となる. そのためには合わせるべき観測量の「実験値」なるものについての十分な知識を持っていることが望ましい. そして, かなりの精度で数値合わせをすべき量と, そうではなくて, だいたい近い数値が出ればそれでよい量との区別をしっかりと認識しておくことが大切である. その上で, そのモデルに含まれるフリーパラメーターの数と, 合わせることで観測量の独立な数 (観測量の間の独立な関係式の数) とを問題にすればよい. 例えば, 3 家族のクォーク質量行列モデルでは, 合わせるべき観測量は, 6 個のクォーク質量と 4 個の CKM 行列パラメーターの計 10 個である. (クォーク質量はエネルギースケールに大きく依存するので, この依存性を無視できるように, クォーク質量比のみを問題とするなら, 観測量は計 9 個となる.) 例えば文献 [4] では, 9 個の観測量を 2 個のフリーパラメーターで与える純現象論的質量行列形が提案されている.

クォーク質量行列について条件 (b) を考えるとき, その「シンプルな美しい形」と称する形は, どのエネルギースケールで規定されるものかを注意しなければならない. 例えば, ある大統一理論エネルギースケール $\mu = m_X$ でその形が与えられていて, それを我々のエネルギースケール $\mu = m_Z$ に降ろしてくると, その形はすっかり複雑なものとなり (そのこと自身はそれでよいのだが), 実験との数値合わせも大きく損なわれてしまうということでは困る. この問題は, ニュートリノ質量行列では生じないと考えることは楽観的すぎ

る。実際、何人かの著者はこのことを逆に積極的に利用して、 $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_i$ の大角度混合を与えるモデルを提案している [5].

条件 (b) は、その形が際立ってシンプルであったり美しいものであるなら、必ずしもその形が、その提案時点で理論的な説明がついていることを要求する訳ではない。将来の理論へつながるような「何か」を予感されるだけでそれでよい。それはかなり個人の主観的な問題であり、優劣のつかないまま多くの「純現象論的モデル」が世に出回っているのは、そのためである。

2. 観測量の最新値

質量行列の議論に入る前に、ここで観測量の最新値をまとめておく。

2.1 クォーク質量と CKM 行列

従来、クォーク質量値には、Gasser と Leutwyler[6] によって求められた (1982 年), エネルギースケール $\mu = 1 \text{ GeV}$ での値がよく利用された. しかし, クォーク質量行列の議論には, CKM 行列 V_{ij} がエネルギースケール $\mu = m_W$ での値に対応するので, これに合わせて, $\mu = m_Z$ での値に統一してクォーク質量 (running quark masses) $m_q(\mu)$ を見ることが便利である. 最近の計算では, 次のような値が算出されている [7].

$$\begin{aligned} m_u(m_Z) &= 2.33_{-0.45}^{+0.42} \text{ MeV}, & m_c(m_Z) &= 677_{-61}^{+56} \text{ MeV}, & m_t(m_Z) &= 181 \pm 13 \text{ GeV}, \\ m_d(m_Z) &= 4.69_{-0.66}^{+0.60} \text{ MeV}, & m_s(m_Z) &= 93.4_{-13.0}^{+11.8} \text{ MeV}, & m_b(m_Z) &= 3.00 \pm 0.11 \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

しかしながら, ここにはモデル依存から来る誤差は含まれていない. 例えば, m_u, m_d, m_s の間の質量比については, (2.1) 式からの誤差で十分と考えてよい. しかし, m_c, m_b, m_t については, 前者の質量値抽出法とは異なる計算手法に立って求めている. 前者と後者の間の質量比は, 場合によってはもっと大きな誤差が存在する可能性もあるので, 注意が必要である. また, $m_s(\mu)$ の値も, 抽出法によってかなり異なる値が得られているので, あまり厳密にこの値にとらわれない方がよい.

CKM 行列 V_{ij} の大きさ $|V_{ij}|$ については, 次の通りである [8].

$$|V_{us}| = 0.21196 \pm 0.0023, \quad (2.2)$$

$$|V_{cb}| = 0.0395 \pm 0.0017, \quad (2.3)$$

$$|V_{ub}/V_{cb}| = 0.08 \pm 0.02. \quad (2.4)$$

$|V_{us}|$ の値は, モデルへのインプットとして十分に耐える値と考えてよい. また, $|V_{cb}|$ の値は最近モデルに依存せずほぼ上記の値に落ちついて来たように見えるので, 信用してよさそうである. $|V_{ub}|$ の値は, (2.4) の誤差が示すように, まだインプットとして使うには十分正確な値とは言い難い. クォークの 3 家族混合の立場では, CKM 行列の独立量は 4 個である. $|V_{us}|, |V_{cb}|, |V_{ub}|$ に加えて, あと, CP の破れの位相を決めるかまたは $|V_{td}|$ の値を決めれば, CKM 行列 V は rephasing の自由度を残して, 完全に決定されてしまう. Particle Data Group (PDG) による 1998 年版 [8] (F.J.Gilman によるレビュー) によれば, $m_t(m_t) = 166 \pm 5 \text{ GeV}$, $\eta_{QCD} = 0.55$ として,

$$|V_{tb}^* \cdot V_{td}| = 0.0084 \pm 0.0018 \quad (2.5)$$

を報告している. しかし, モデル依存性を考えれば, もう少し誤差は大きいと考えた方がよからう.

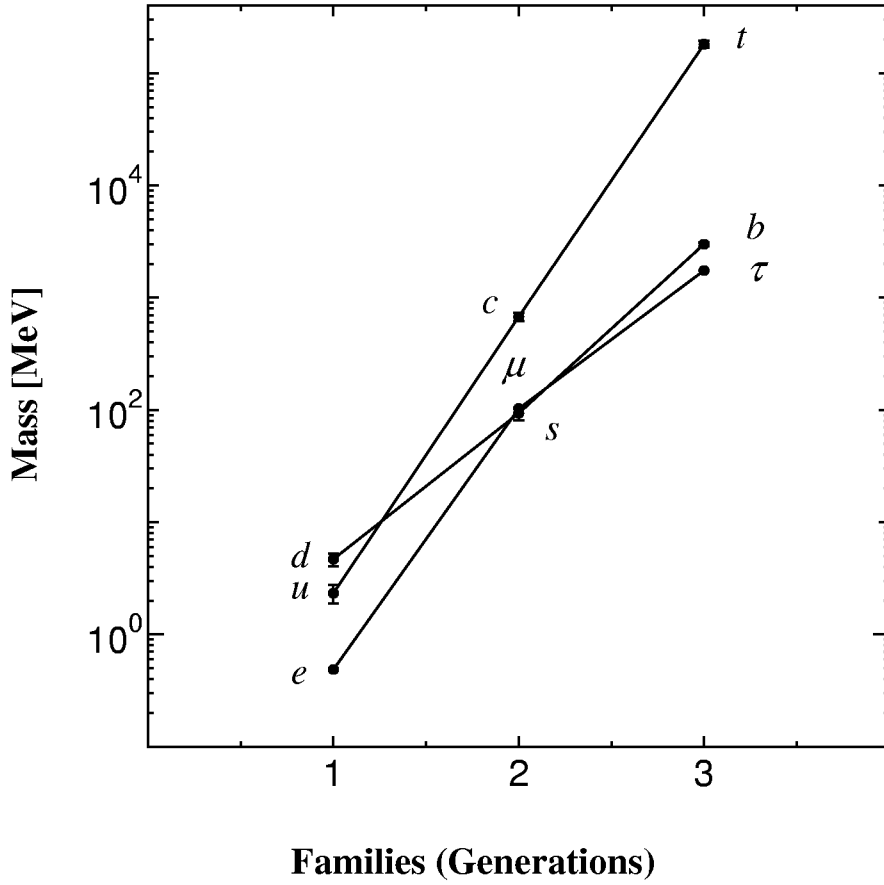


図 2.1 クォーク・レプトンの質量

2.2 レプトン質量行列に関する観測量

荷電レプトンの質量値については、非常に正確な数値が求まっている。ここでは、クォーク質量値 (2.1) にならって、 $\mu = m_Z$ での値を掲げる。

$$\begin{array}{ccc}
 m_e(m_Z) = 0.48684727 \text{ MeV} & , & m_\mu(m_Z) = 102.75138 \text{ MeV} & , & m_\tau(m_Z) = 1.74669 \text{ GeV} . \\
 \pm 0.00000014 & & \pm 0.00033 & & \begin{array}{l} +0.00030 \\ -0.00027 \end{array}
 \end{array} \quad (2.6)$$

これに対して、ニュートリノ質量行列についての観測量はまだ正確な値は得られておらず、質量差 Δm_{ij}^2 と混合角 θ_{ij} についての制限しかわかっていない。どうやら確からしいと思われる量は、大気ニュートリノの観測データ [9] から推測される $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ (または $\nu_\mu \rightarrow \nu_s$: ν_s は sterile neutrino) に対する混合角 $\theta_{\mu\tau}$ と質量差 $\Delta m_{\tau\mu}^2$

$$\sin^2 2\theta_{\mu\tau} \simeq 1.0, \quad \Delta m_{\tau\mu}^2 \simeq 2.2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (2.7)$$

$$\left[\sin^2 2\theta_{\mu\tau} > 0.82, \quad 5 \times 10^{-4} \text{ eV}^2 < \Delta m_{\tau\mu}^2 < 6 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (90\% \text{ CL}) \right], \quad (2.8)$$

くらいであろう。太陽ニュートリノデータから推測される $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の情報 [10] については、もう少し様子を見た方がよさそうである。

2.3 ゲージ結合定数の値

質量行列の議論には、エネルギースケールの依存性についての考察 (coupling constants の evolution) が欠かせない。このとき、インプットとして用いられるゲージ結合定数の値を以下に掲げる [8].

$$\begin{aligned}\alpha_1(m_Z) &= 0.016829 \pm 0.000017, \\ \alpha_2(m_Z) &= 0.033493^{+0.000060}_{-0.000058}, \\ \alpha_3(m_Z) &= 0.119 \pm 0.002.\end{aligned}\tag{2.9}$$

ここで、 $\alpha_i = g_i^2/4\pi$ であり、 g_1 は SU(5)-GUT の極限で $g_1 = g_2 = g_3$ となるように規格化されたときの $U(1)_Y$ のゲージ結合定数であり、また、 g_2, g_3 はそれぞれ $SU(2)_L, SU(3)_c$ のゲージ結合である。 $\alpha(m_Z)$ の値は、

$$\begin{aligned}\alpha(m_Z) &= (128.89 \pm 0.09)^{-1}, \\ \sin^2 \theta_W &= 0.23165 \pm 0.000024,\end{aligned}\tag{2.10}$$

とから、

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{5}{3} \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\tag{2.11}$$

によって計算された。

3. クォーク質量行列の形態学

この章では、クォークの質量行列について、特定の質量行列形を仮定することなく、一般的に主張することのできる性質（結論）を述べる。また、 3×3 行列の場合についての一般的結論についてもまとめて置く。特定の質量行列形の考察は次章に譲る。

3.1 独立なパラメーターの数

一般に、 $n \times n$ 質量行列 M_q は $2n^2$ 個のパラメーターを含み得る。この M_q は次のように対角化される。

$$U_{qL}^\dagger M_q U_{qR} = P(\delta_q) D_q, \quad (3.1)$$

ここで

$$P(\delta) = \text{diag}(e^{i\delta_1}, e^{i\delta_2}, \dots, e^{i\delta_n}), \quad (3.2)$$

$$D_q = \text{diag}(m_1^q, m_2^q, \dots, m_n^q), \quad (3.3)$$

であり、 $P(\delta)$ は、一般に (3.1) で得られる固有値は複素数であつてよいので、質量値 m_i^q ($i = 1, 2, \dots, n$) を positive と定義し、その位相 δ_{qi} を外へくり出すために用いられた。 U_{qL}, U_{qR} は、それぞれ

$$H_{qL} = M_q M_q^\dagger, \quad H_{qR} = M_q^\dagger M_q \quad (3.4)$$

の対角化

$$U_{qL}^\dagger H_{qL} U_{qL} = D_q^2, \quad U_{qR}^\dagger H_{qR} U_{qR} = D_q^2 \quad (3.5)$$

によって得られる。(3.5) に登場する D_q は、 H_{qL}, H_{qR} がエルミート行列であるので、 $D_q^\dagger = D_q$ を満たす。 $n \times n$ エルミート行列の独立なパラメーター数は n^2 個であるから、量 A の独立なパラメーター数を $N(A)$ で表すことにすれば

$$N(M_q) = 2n^2 = N(H_{qL}) + N(H_{qR}) \quad (3.6)$$

が成立している。一方、 $n \times n$ ユニタリ行列の独立変数は n^2 個であるから、(3.5) において、与えられた n^2 個のパラメーターを持つ $H_{qL} (H_{qR})$ から、 n^2 個のパラメーターによって記述される $U_{qL} (U_{qR})$ と n 個の値を持つ D_q とが決まり、自由度の数が合わないように見える。これは、実は、 U_{qL}, U_{qR} の変換

$$\begin{aligned} U_{qL} &\rightarrow U'_{qL} = U_{qL} P(\delta_{qL}), \\ U_{qR} &\rightarrow U'_{qR} = U_{qR} P(\delta_{qR}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

に対して (3.5) が不変なことによる。即ち、 U_{qL}, U_{qR} は常に $P(\delta_{qL}), P(\delta_{qR})$ の自由度を持ち、従つて、 U_{qL}, U_{qR} の自由度は $N(U_{qL}) = n(n-1), N(U_{qR}) = n(n-1)$ で与えられる。

変換 (3.7) は、クォークの変換

$$\begin{aligned} q_L &\rightarrow q'_L = P^\dagger(\delta_{qL}) q_L, \\ q_R &\rightarrow q'_R = P^\dagger(\delta_{qR}) q_R, \end{aligned} \quad (3.8)$$

に対応し, この位相 δ_{qL}, δ_{qR} は量子力学的に観測することのできない量である. (3.8) の変換を “rephasing” と呼ぶ. 観測量は rephasing invariant である.

式 (3.1) は, rephasing (3.7) のもとに

$$U_{qL}^{\dagger} M_q U_{qR}' = P(\delta_q - \delta_{qL} + \delta_{qR}) D_q, \quad (3.9)$$

となる. 普通, 固有値 m_i^q が positive となるように $(\delta_q - \delta_{qL} + \delta_{qR})_i$ の値が 0 また π に選ばれる. 従って,

$$U_{qL}^{\dagger} M_q U_{qR} = D_q \quad (3.10)$$

と書く表示では, $P(\delta_{qL}), P(\delta_{qR})$ の $2n$ 個の変数の内, n 個はすでに固定されてしまっている. 普通, δ_{qR} を固定することによって m_i^q を positive に選ぶことが多い. この場合, U_{qL}, U_{qR} の独立なパラメーターの数は

$$N(U_{qL}) = n(n-1), \quad N(U_{qR}) = n^2, \quad (3.11)$$

となる. 従って

$$N(M_q) = 2n^2 = N(U_{qL}) + N(U_{qR}) + N(D_q) \quad (3.12)$$

が成立する.

$n \times n$ CKM 行列 V_L は

$$V_L = U_{uL}^{\dagger} U_{dL}, \quad (3.13)$$

で与えられる. $SU(2)_L \times U(1)_Y$ モデルでは

$$V_R = U_{uR}^{\dagger} U_{dR}, \quad (3.14)$$

は観測量ではないが, $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$ モデルでは V_R は観測量となる. V_L は rephasing (3.7) のもとで,

$$V_L \rightarrow V_L' = P^{\dagger}(\delta_{uL}) V_L P(\delta_{dL}), \quad (3.15)$$

と変化するので, ユニタリー行列 V_L の n^2 個のパラメーターの内, $2n$ 個は unphysical parameters となる. また, 実は $P^{\dagger}(\delta_{uL})$ と $P(\delta_{dL})$ の全体の位相の差は u_L, d_L には吸収できない量なので, V_L の physical parameters の数は

$$N(V_L) = n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2, \quad (3.16)$$

となる. V_L に登場する CP の破れを引き起こす位相の数 N_{CP} は $n \times n$ 直交行列のパラメーター数が $n(n-1)/2$ なので,

$$N_{CP}(V_L) = (n-1)^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \quad (3.16)$$

となる．ところで， $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$ モデルでは V_R も観測量となるが，すでに $P(\delta_{qR})$ は D_q を positive に定義することに利用されてしまっているので，(3.15) に対応するような rephasing の自由はない．よって，

$$N(V_R) = n^2, \quad (3.17)$$

$$N_{CP}(V_R) = n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1), \quad (3.18)$$

となる．但し，(3.16)，(3.17) の計算で， D_q を positive に定義するための位相を $P(\delta_{qR})$ によって与えたとした．このことは何ら本質的ではなく， $P(\delta_{qL})$ によって D_q を固定したと考えるもよい．しかし， $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$ モデルにおいても，普通は V_L の方が先に実験的に決定され，その後で V_R が決まるであろうと考えている．その場合は，(3.11) のように自由度を選ぶことが実際的である．

3.2 Rebasing の自由度

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ モデルでは，式(1.3)–(1.5) で示したように， A, B_u, B_d を任意の $n \times n$ ユニタリー行列として

$$\begin{aligned} M_u &\rightarrow M'_u = A^\dagger M_u B_u, \\ M_d &\rightarrow M'_d = A^\dagger M_d B_d, \end{aligned} \quad (3.19)$$

で与えられるクォーク質量行列 (M'_u, M'_d) は，もとの (M_u, M_d) と全く同一の観測量を与える．以後，このことを「 (M'_u, M'_d) と (M_u, M_d) は等価である」と呼ぶことにする．

ユニタリー行列 A, B_u, B_d の自由度は各々 n^2 であるが， A, B_u, B_d の全体の位相の中の1つは意味を持たない（相対位相のみが意味を持つ）．即ち，

$$N(A, B_u, B_d) = 3n^2 - 1 \quad (3.20)$$

であり，従って，

$$N(M_u) + N(M_d) = 2n^2 + 2n^2 \quad (3.21)$$

の値と

$$\begin{aligned} N(D_u) &+ N(D_d) &+ N(V_L) &+ N(A, B_u, B_d) \\ = n &+ n &+ (n-1)^2 &+ (3n^2 - 1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

の値とは一致する．

$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$ のモデルでは，

$$\begin{aligned} M_u &\rightarrow M'_u = A^\dagger M_u B, \\ M_d &\rightarrow M'_d = A^\dagger M_d B, \end{aligned} \quad (3.23)$$

で与えられる (M'_u, M'_d) と (M_u, M_d) とが等価である．このとき

$$\begin{aligned} N(D_u) &+ N(D_d) &+ N(V_L) &+ N(V_R) &+ N(A, B) \\ = n &+ n &+ (n-1)^2 &+ n^2 &+ (2n^2 - 1) \end{aligned} \quad (3.24)$$

となって, (3.21) の値とパラメーター数は一致する.

Rephasing と rephasing の違いを 表 3.1 に対比してまとめる. 要するに, rephasing は質量の固有状態におけるクォークベースの位相変換であり, これに対して, rephasing は weak-interactions の固有状態でのクォークベースの変換である. 当然, 後者は, 質量行列の形を変える. また, 前者は, V_L の phase convention を変える. (もちろん, 観測量には変化を与えないが.)

表 3.1 Rephasing と Rebasng

	Rephasing	Rebasng	
		$SU(2)_L \times U(1)_Y$	$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$
Quark basis	$u_L \rightarrow u'_L = P^\dagger(\delta_{uL})u_L$ $d_L \rightarrow d'_L = P^\dagger(\delta_{dL})d_L$ $u_R \rightarrow u'_R = P^\dagger(\delta_{uR})u_R$ $d_R \rightarrow d'_R = P^\dagger(\delta_{dR})d_R$	$u_L^0 \rightarrow u_L^{0'} = A^\dagger u_L^0$ $d_L^0 \rightarrow d_L^{0'} = A^\dagger d_L^0$ $u_R^0 \rightarrow u_R^{0'} = B_u^\dagger u_R^0$ $d_R^0 \rightarrow d_R^{0'} = B_d^\dagger d_R^0$	$u_L^0 \rightarrow u_L^{0'} = A^\dagger u_L^0$ $d_L^0 \rightarrow d_L^{0'} = A^\dagger d_L^0$ $u_R^0 \rightarrow u_R^{0'} = B^\dagger u_R^0$ $d_R^0 \rightarrow d_R^{0'} = B^\dagger d_R^0$
Mass matrices	$\begin{pmatrix} M_u \\ M_d \end{pmatrix} : \text{invariant}$	$M_u \rightarrow M'_u = A^\dagger M_u B_u$ $M_d \rightarrow M'_d = A^\dagger M_d B_d$	$M_u \rightarrow M'_u = A^\dagger M_u B$ $M_d \rightarrow M'_d = A^\dagger M_d B$
Physical quantities	$\begin{pmatrix} D_u \\ D_d \end{pmatrix} : \text{invariant}$ $V_L \rightarrow V'_L = P^\dagger(\delta_{uL})V_L P(\delta_{dL})$ (V'_L cannot physically be distinguished from V_L)	$\begin{pmatrix} D_u \\ D_d \end{pmatrix} : \text{invariant}$ $V_L : \text{invariant}$	$\begin{pmatrix} D_u \\ D_d \end{pmatrix} : \text{invariant}$ $\begin{pmatrix} V_L \\ V_R \end{pmatrix} : \text{invariant}$

このように, rebasng の自由度があるために一般には観測量のみからは, クォーク質量行列の形を決定することはできない. ある basis でのクォーク質量行列が (M_u, M_d) で与えられ, その対角化が (3.10) での U_{qL}, U_{qR} で与えられるとき, (3.23) の (M'_u, M'_d) から計算されるエルミート行列 (H'_{uL}, H'_{dL}) は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
 H'_{uL} &\equiv M'_u M_u^{\dagger} = (A^\dagger U_{uL})(D_u D_u^\dagger)(A^\dagger U_{uL})^\dagger, \\
 H'_{dL} &\equiv M'_d M_d^{\dagger} = (A^\dagger U_{uL})(V_L D_d D_d^\dagger V_L^\dagger)(A^\dagger U_{uL})^\dagger,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

あるいは

$$\begin{aligned}
 H'_{uL} &\equiv M'_u M_u^{\dagger} = (A^\dagger U_{uL})(V_L^\dagger D_u D_u^\dagger V_L)(A^\dagger U_{uL})^\dagger, \\
 H'_{dL} &\equiv M'_d M_d^{\dagger} = (A^\dagger U_{uL})(D_d D_d^\dagger)(A^\dagger U_{uL})^\dagger.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

例えば, $A = U_{uL}^\dagger$ と選べば,

$$H'_{uL} = D_u D_u^\dagger, \quad H'_{dL} = V_L D_d D_d^\dagger V_L^\dagger, \tag{3.27}$$

と、 (H'_{uL}, H'_{dL}) はすべて観測量のみで表現できることになる。同じ議論は、もし M_q がエルミート形であるということを仮定するなら、

$$M'_{uL} = D_u, \quad M'_{dL} = V_L D_d V_L^\dagger \quad (3.28)$$

となり、質量行列 (M'_{uL}, M'_{dL}) はすべて観測量のみで記述されることとなる。即ち、このモデルでは観測量は

$$N(D_u) + N(D_d) + N(V_L) = n + n + (n - 1)^2 = n^2 + 1 \quad (3.29)$$

であるのに対して、 (M'_{uL}, M'_{dL}) のパラメーター数は

$$N(M'_{uL}) + N(M'_{dL}) = n + (n^2 - n + 1) \quad (3.30)$$

となって、質量行列のパラメーター数と観測量のパラメーター数とが一致している。ここで $N(M'_{dL}) = n^2 - n + 1$ は次のような事情による。 $n \times n$ エルミート行列のパラメーター数は n^2 個であるが、 V_L は rephasing の自由 (3.15) があるので、この basis では、 M'_{dL} は $P^\dagger(\delta_{uL})M'_{dL}P(\delta_{uL})$ と等価である。 $P(\delta_{uL})$ の自由度は、 δ_{uLi} の相対位相のみが意味のある量なので、 $N(P_{uL}) = n - 1$ である。従って、 M'_{dL} のパラメーター数 n^2 から、この位相の数 $(n - 1)$ で引けば、 $N(M'_{dL}) = n^2 - n + 1$ となる。

ここで、一般に、rephasing は、観測量を変えない変換であるが、観測量から質量行列を逆に表そうという議論においては、rephasing (3.15) は質量行列 (M_u, M_d) を変えてしまう変換であるということに注意しよう。(3.25) より、一般に観測量 D_u, D_d, V_L が与えられると、任意の質量行列 (H_{uL}, H_{dL}) は

$$H_{uL} = A^\dagger D_u D_u^\dagger A, \quad H_{dL} = A^\dagger V_L D_d D_d^\dagger V_L^\dagger A, \quad (3.31)$$

で与えられる (A は任意のユニタリ行列)。 D_u と D_d は観測量によって決まる量であるが、 V_L の方は実際に書き下すには (3.15) の rephasing の自由があった。従って、

$$H'_{dL} = A^\dagger P^\dagger(\delta_{uL}) V_L D_d D_d^\dagger V_L^\dagger P(\delta_{uL}) A \quad (3.32)$$

で与えられる H'_{dL} と (3.31) の H_{dL} とは等価である。 $A = \mathbf{1}$ でない限りは、一般には $P(\delta_{uL})$ の存在は、単に H_{dL} の各要素の位相を変えるといったものではなく、 H'_{dL} は H_{dL} から形そのものを変えてしまう。観測量から (H_{uL}, H_{dL}) の形を見ようという作業をするときには、 V_L の phase convention をどう選ぶかに注意を払う必要がある。逆に言えば、 (H_{uL}, H_{dL}) に登場するパラメーターの内、 $n - 1$ 個は必ず V_L の phase convention にかかわるパラメーターであるとして、モデルから消去可能である [11]。

また、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ モデルの場合には、rephasing (3.19) において、 B_u と B_d は別々に任意に選び得るということを利用すると、次の定理が成り立つ。

[定理] 任意の質量行列 (M_u, M_d) は、rephasing により、これと等価なエルミート型質量行列 $(\widetilde{M}_u, \widetilde{M}_d)$ へと変換することが可能である。

[証明] (M_u, M_d) は

$$M_u = U_{uL} D_u U_{uR}^\dagger, \quad M_d = U_{dL} D_d U_{dR}^\dagger \quad (3.33)$$

と表せるので, rebaseing により

$$\begin{aligned} M_u &\rightarrow M'_u = M_u B_u = U_{uL} D_u U_{uR}^\dagger B_u, \\ M_d &\rightarrow M'_d = M_d B_d = U_{dL} D_d U_{dR}^\dagger B_d, \end{aligned} \quad (3.34)$$

と書ける. よって

$$B_u = U_{uR} U_{uL}^\dagger, \quad B_d = U_{dR} U_{dL}^\dagger \quad (3.35)$$

と置けば, M'_u および M'_d はエルミート型となる. (証明終)

この定理は, $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$ モデルには使えないことに注意しよう.

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ モデルではこの定理を用いれば, 適当な rebaseing により

$$\begin{aligned} M_u &\rightarrow \widetilde{M}_u = D_u, \\ M_d &\rightarrow \widetilde{M}_d = V_L D_d V_L^\dagger, \end{aligned} \quad (3.36)$$

なる (M_u, M_d) と等価な質量行列 $(\widetilde{M}_u, \widetilde{M}_d)$ を得ることができる. 従って, 一般の任意の質量行列は

$$\begin{aligned} M_u &= A^\dagger D_u B_u, \\ M_d &= A^\dagger V_L D_d V_L^\dagger B_d, \end{aligned} \quad (3.37)$$

の形で表せる.

しばしば, クォーク質量行列の議論の際に, この rebaseing を利用して, よりシンプルな (より少ないパラメータを持った) 等価質量行列への変換した上で, 観測量 $|V_{ij}|$ と m_i^q の関係を議論することがある. 我々の目的が, 観測量とぴったり一致する質量行列を見つけ出すことなら, それは (3.34) で与えられる $(\widetilde{M}_u, \widetilde{M}_d)$ がまさに望むものである. しかしながら, 我々の目的が (M_u, M_d) の背後にある法則性モデルの構築にあるなら, 安易に rebaseing を利用してシンプルな形へ (M_u, M_d) を持って行って $|V_{ij}|$ と m_i^q の関係を求めても, それはあまり意味がないことに注意すべきである. それはあたかも, 暗い場所で落とし物をしたのに, 暗い所ではよく見えないからと言って, 電燈のある明るい場所で探しものをしてに似ている. (M_u, M_d) の形は, その背後に, モデルが想定されてこそ意味があるということを忘れてはならない.

3.3 3×3 CKM 行列の形態学

家族数 (世代数) n が $n = 3$ であることはありそうである ($n > 3$ である可能性は完全に否定されたわけではない). ここで, $n = 3$ の場合の CKM 行列 V_L について, モデルに無関係に得られる諸性質をまとめておくことは有意義なことであろう. なぜなら, 特定のモデルについて議論を行ったとき, 得られた結論がそのモデルに固有なものかあるい

は他のモデルでも得られる一般的なものかを知るために重要な役割を果たしてくれるからである。以後、 V_L を単に V と書くことにする。

3×3 CKM 行列 V は、(3.16) で述べたように、4 個の独立なパラメーターによって記述される。普通、次の Chau-Keung Harari-Leurer-Fritzsch [13] による phase convention

$$\begin{aligned}
V &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$[s_{ij} = \sin \theta_{ij}, c_{ij} = \cos \theta_{ij}]$ が V の表現として用いられる。この表示では、

$$\det(H_u H_d - H_d H_u) = 2iv_u^2 v_d^2 J, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
v_u^2 &= (m_t^2 - m_c^2)(m_t^2 - m_u^2)(m_c^2 - m_u^2), \\
v_d^2 &= (m_b^2 - m_s^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_s^2 - m_d^2),
\end{aligned} \quad (3.40)$$

で定義される Jarlskog の rephasing invariant J [2] は、

$$J = \text{Im}(V_{us}V_{cs}^*V_{ub}^*V_{cb}) = c_{13}^2 s_{13} c_{12} s_{12} c_{23} s_{23} \sin \delta, \quad (3.41)$$

で与えられる。

ところで、CKM 行列 V の独立なパラメーター数は 4 であるから、その内の 3 つとして、実験でより直接的に測定される量

$$\lambda = |V_{us}|, \quad \rho = |V_{cb}|, \quad \sigma = |V_{ub}|, \quad (3.42)$$

を用いることが便利である。このとき、残り 1 つの変数として、(3.38) における位相 δ を選んでもよいし、あるいは rephasing invariant J を選んでもよい。崩壊の実験では、位相よりも、 V_{ij} の大きさ $|V_{ij}|$ がより直接的な観測量として問題となる。この場合は、第 4 のパラメーターとして、 $|V_{td}|$ を選ぶか、あるいは、

$$\omega \equiv |V_{cd}|^2 - |V_{us}|^2 = |V_{ts}|^2 - |V_{cb}|^2 = |V_{ub}|^2 - |V_{td}|^2, \quad (3.43)$$

を選ぶことが便利である [14]。 $|V_{ij}|$ の大きさは、 $\lambda, \rho, \sigma, \omega$ の 4 つの変数を用いれば

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \lambda^2 - \sigma^2} & \lambda & \sigma \\ \sqrt{\lambda^2 + \omega} & \sqrt{1 - \lambda^2 - \rho^2 - \omega} & \rho \\ \sqrt{\sigma^2 - \omega} & \sqrt{\rho^2 + \omega} & \sqrt{1 - \rho^2 - \sigma^2} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda^2-\sigma^2} & \lambda & \sigma e^{-i\delta} \\ -\sqrt{\lambda^2+\omega} e^{i\phi_{21}} & \sqrt{1-\lambda^2-\rho^2-\omega} e^{i\phi_{22}} & \rho \\ -\sqrt{\sigma^2-\omega} e^{i\phi_{31}} & -\sqrt{\rho^2+\omega} e^{i\phi_{32}} & \sqrt{1-\rho^2-\sigma^2} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

と書け, ここで, 実験事実 $\lambda^2 \gg \rho^2 \gg \sigma^2$ および後で示すように $|\omega| \leq O(\lambda, \rho, \sigma)$ であることを用いれば,

$$\tan \phi_{21} \simeq \pm(\rho\sigma/\lambda) \sin \delta \simeq 0, \quad (3.46)$$

$$\tan \phi_{22} \simeq \pm\lambda\rho\sigma \sin \delta \simeq 0, \quad (3.47)$$

$$\tan \phi_{32} \simeq \pm(\lambda\sigma/\rho) \sin \delta \simeq 0, \quad (3.48)$$

$$\cos \delta \simeq \frac{\lambda^2\rho^2 + \omega}{2\lambda\rho\sigma}, \quad (3.49)$$

なる関係がある。(ϕ_{31} については後の (3.67) で与えられる.)

rephasing invariant J は, 近似なしの形で

$$\begin{aligned} J^2 &= \lambda^2\rho^2\sigma^2 - \frac{1}{4}[\lambda^2\rho^2 + (\lambda^2 + \rho^2)\sigma^2]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}[\lambda^2\rho^2(1 + \sigma^2) - (\lambda^2 + \rho^2)\sigma^2(1 - \sigma^2)]\omega - \frac{1}{4}(1 - \sigma^2)^2\omega^2, \end{aligned} \quad (3.50)$$

と書ける [15].

$$\frac{\partial J^2}{\partial \omega} = -\frac{1}{2}[\lambda^2\rho^2(1 + \sigma^2) - (\lambda^2 + \rho^2)\sigma^2(1 - \sigma^2) + (1 - \sigma^2)^2\omega], \quad (3.51)$$

であるから, J^2 は $\omega = \omega_m$

$$\omega_m = -\frac{1}{(1 - \sigma^2)^2}[\lambda^2\rho^2(1 + \sigma^2) - (\lambda^2 + \rho^2)\sigma^2(1 - \sigma^2)] \quad (3.52)$$

のところで, 最大値 J_{max}^2

$$J_{max}^2 = \lambda^2\rho^2\sigma^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{1 - \sigma^2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2}{1 - \sigma^2}\right), \quad (3.53)$$

の値をとることが分かる. 即ち

$$|J| < |J|_{max} \simeq \lambda\rho\sigma\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\rho^2} \quad (3.54)$$

が成立する. また, $J^2 > 0$ の条件より, ω の範囲

$$\omega_- < \omega < \omega_+ \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \frac{1}{(1 - \sigma^2)^2} \left\{ -[\lambda^2\rho^2(1 + \sigma^2) - (\lambda^2 + \rho^2)\sigma^2(1 - \sigma^2)] \right. \\ &\quad \left. \pm 2\lambda\rho\sigma\sqrt{1 - \sigma^2 - \lambda^2}\sqrt{1 - \sigma^2 - \rho^2} \right\} \\ &\simeq \pm 2\lambda\rho\sigma \left(1 \mp \frac{\lambda\rho}{2\sigma}\right), \end{aligned} \quad (3.56)$$

が得られる [14]. 従って $|\omega|$ は大変小さな量

$$|\omega| \leq O(\lambda\rho\sigma) \quad (3.57)$$

であることが分かる.

このような $\lambda, \rho, \sigma, \omega$ を用いると, $\lambda^2 \gg \rho^2 \gg \sigma^2 \sim \omega$ の条件だけから (モデルに立ち入ることなく), いくつかの関係式が得られる.

まずは,

$$|V_{cd}| \simeq |V_{us}|, \quad |V_{ts}| \simeq |V_{cb}|, \quad (3.58)$$

は明らかであろう. また,

$$\begin{aligned} 2(|V_{ud}| - |V_{us}|) &= 2 \left(\sqrt{1 - \lambda^2 - \sigma^2} - \sqrt{1 - \lambda^2 - \rho^2 - \omega} \right) \\ &\simeq \frac{\rho^2 - \sigma^2 + \omega}{1 - \lambda^2} \simeq \rho^2 = |V_{cd}|^2, \end{aligned} \quad (3.59)$$

などが成立する.

CP の破れを無視するモデルでは, $J^2 \rightarrow 0$, 即ち, $\omega \rightarrow \omega_{\mp}$ となっている. 従って, (3.57) より

$$\lambda^2\rho^2 \mp 2\lambda\rho\sigma + \omega \simeq 0, \quad (3.60)$$

あるいは

$$(\lambda\rho \mp \sigma)^2 \simeq \sigma^2 - \omega, \quad (3.61)$$

即ち

$$|V_{us}||V_{cb}| \mp |V_{ub}| \simeq |V_{td}|, \quad (3.62)$$

あるいは $|V_{cb}| \simeq |V_{ts}|$ を用いれば

$$\frac{|V_{td}|}{|V_{ts}|} \pm \frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \simeq |V_{us}| \quad (3.63)$$

なる関係式が得られる.

また, かつて symmetric CKM matrix model[16] なるものが流行した. 即ち $|V_{ij}| = |V_{ij}|$ を与えるモデルであり, このことは $\omega = 0$ を意味する. ω の範囲には (3.55) の条件があったので, $J^2 \neq 0$ でかつ $\omega = 0$ なる解が存在するためには, $\omega_+ > 0$ でなければならない. 即ち, (3.57) より $2\sigma > \lambda\rho$ を得る. 従って, symmetric CKM matrix model では

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} = \frac{\sigma}{\rho} > \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}|V_{us}| = 0.1098 \pm 0.0012, \quad (3.64)$$

を得る. 左辺の実験値 [8] は $|V_{ub}/V_{cb}| = 0.08 \pm 0.02$ であるので, symmetric CKM matrix model は実験からはほぼ否定されたと見てよい.

このように, $|V_{ij}|$ にかかわるいくつかの関係式は, 質量行列の形に立ち入ることなく主張できるものがあるので, 注意が必要である.

この節の最後として、B physics などによく話題となる unitary triangle についてコメントをしておく。 V_{ij} の直交性より

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0, \quad (3.65)$$

が成立する。これを、(3.45) の表示を使って書けば、

$$\sqrt{1 - \lambda^2 - \sigma^2} \cdot \sigma e^{i\delta} - \sqrt{\lambda^2 + \omega} \cdot \rho e^{i\phi_{21}} - \sqrt{\sigma^2 - \omega} \cdot \sqrt{1 - \rho^2 - \sigma^2} e^{i\phi_{31}} = 0 \quad (3.66)$$

と書ける。即ち、十分な近似で

$$\sigma e^{i\delta} \simeq \lambda\rho + \sqrt{\sigma^2 - \omega} e^{i\phi_{31}} \quad (3.67)$$

と書ける。図で示せば、図 3.1 のような関係となっている。

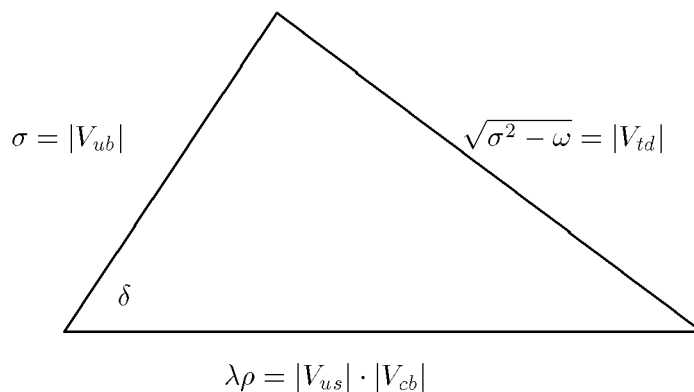


図 3.1 Unitary triangle

(3.36) で与えた J は

$$J \simeq |V_{us}| |V_{cs}| |V_{ub}| |V_{cb}| \sin \delta \quad (3.68)$$

であり、 J の大きさは、図 3.1 に与えた三角形の面積の 2 倍に対応する。

4. 特定のベース上でのクォーク質量行列の形態学

前の章では特定の basis を選ぶことなく、クォーク質量行列の一般的関係を議論してきた。ここでは、 3×3 クォーク質量行列を特定のベース (basis) 上で見た場合に行われる関係式について紹介する。これもまた、クォーク質量行列の形態学的研究の一つである。

4.1 $M_u = D_u$ を持ったベース上での質量行列

任意の質量行列 (M_u, M_d) は、rebasings の自由を利用すれば、 M_u が対角型である basis に一般性を失うことなく変形ができる。この basis での行列を波 (tilde) をつけて表わせば、(3.27) で示したように

$$(\tilde{H}_{uL}, \tilde{H}_{dL}) = (D_u D_u^\dagger, V_L D_d D_d^\dagger V_L^\dagger), \quad (4.1)$$

と表わせる。即ち、 $(\tilde{H}_{uL}, \tilde{H}_{dL})$ の形は完全に観測のみによって与えることができる。 V_L には rephasing の自由があるが、(3.15) の変換 $V_L \rightarrow V_L' = P^\dagger(\delta_{uL})V_L P(\delta_{dL})$ に対して、

$$\tilde{H}_{dL} \rightarrow \tilde{H}'_{dL} = P^\dagger(\delta_{uL})\tilde{H}_{dL}P(\delta_{uL}) \quad (4.2)$$

となるにすぎなく、 $(\tilde{H}_{dL})_{ij}$ の位相が変わるのみであって、 $(\tilde{H}_{dL})_{ij}$ の大きさそのものには影響を与えない。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ モデルの場合は、 (M_u, M_d) はエルミート型行列へと rebasing できるので、

$$(\tilde{M}_u, \tilde{M}_d) = (D_L, V_L D_d V_L^\dagger) \quad (4.3)$$

と書くことができる。 \tilde{M}_d の形は、 $\tilde{M}_d = V_L D_d V_L^\dagger$ より直接計算してもよいが、我々の関心は $(\tilde{M}_d)_{ij}$ の大きさにあるので、次の公式を用いることが便利である [17]。

$$(\tilde{M}_d)_{ii} = |V_{i1}|^2 m_d + |V_{i2}|^2 m_s + |V_{i3}|^2 m_b, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} |(\tilde{M}_d)_{ij}|^2 &= |V_{i1}|^2 |V_{j1}|^2 (m_d - m_s)(m_d - m_b) + |V_{i2}|^2 |V_{j2}|^2 (m_s - m_b)(m_s - m_d) \\ &\quad + |V_{i3}|^2 |V_{j3}|^2 (m_b - m_d)(m_b - m_s), \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (4.5)$$

$|V_{ij}|^2$ を 3.3 節で定義したパラメーター $\lambda, \rho, \sigma, \omega$ を用いて $(\tilde{M}_d)_{ij}$ を直接的に書き下したものは文献 [17] に与えられている。

$|(\tilde{M}_d)_{ij}|$ の大きな項のみを書けば

$$|\tilde{M}_d| \simeq m_b \begin{pmatrix} \frac{m_d}{m_b} + \frac{m_s}{m_b} \lambda^2 & \frac{m_s}{m_b} \lambda & \sigma \\ \frac{m_s}{m_b} \lambda & \frac{m_s}{m_b} & \rho \\ \sigma & \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

と書ける [より詳しい表現は文献 [17] を見よ]. $(\widetilde{M}_d)_{11} = 0$ を要求するモデルでは, よく知られた関係 [18]

$$|V_{us}| \simeq \sqrt{-m_s/m_d} \quad (4.7)$$

が得られることが分かる. また, $(\widetilde{M}_d)_{22}$ を λ についての次のオーダーまで書けば

$$(\widetilde{M}_d)_{22} = m_s + \rho^2 - (m_s/m_b)\lambda^2 + O(\lambda^6), \quad (4.8)$$

となるので, もし $(\widetilde{M}_d)_{22} = (D_d)_{22}$ なる要求を置けば

$$|V_{ub}| \simeq \sqrt{m_s/m_b}|V_{us}|, \quad (4.9)$$

なる関係を得る. (4.9) の右辺に実験値を代入すると 0.0387 なる値を得る. 一方, $|V_{cb}|$ の実験値は $|V_{cb}| = 0.0395 \pm 0.0017$ であり, (4.9) は非常によく成立している.

そのほか, $(\widetilde{M}_u, \widetilde{M}_d)$ に, あるいは $(\widetilde{M}_u, \widetilde{M}_d)$ に簡単な直交変数 A を行った $(M_u, M_d) = (A^T \widetilde{M}_u A, A^T \widetilde{M}_d A)$ に対して, 何らかのシンプルな要求を置くことによって, 実験と一致するいろいろの関係式を得ることができる. これら実験とよく一致する「現象論的要求」に何か意味を持たせることができるのか, 興味のあるところである.

4.2 NNI 型質量行列

次のような形を持つ質量行列を NNI(nearest-neighbor interactions) 型質量行列と呼ぶ:

$$\widehat{M}_q = P^\dagger(\delta_{qL}) \overline{M}_q P(\delta_{qR}), \quad (4.10)$$

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & c_1^q & 0 \\ c_2^q & 0 & b_1^q \\ 0 & b_2^q & a_q \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

Branco, Lavoura, Mota[3] は次の定理を証明した.

[定理] 任意のクォーク質量行列 (M_u, M_d) は, rebasing によってこれと等価な NNI 型質量行列 $(\widehat{M}_u, \widehat{M}_d)$ へと変換することができる.

証明は長くなるので略す. 原論文を参照されたい. 注意すべきは, この証明において, $SU(2)_L \times U(1)_Y$ モデルでは, rebasing が (3.19) に示したように, B_u と B_d とで別々に選んでよいということを用いていることである. 従って, この定理は, $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$ モデルには適用できない. また, (M_u, M_d) を常にエルミート型に選ぶことができるという定理とは両立しない. (B_u, B_d) はどちらかの型を満たすようにすでに規定しまっている.)

観測量を計算する際には, 位相 $P(\delta_{qR})$ は効かない. また, $P(\delta_{qL})$ の方は, real matrices \overline{M}_q を対角化する直交行列を O_q と書けば,

$$O_{qL}^T \overline{M}_q O_{qR} = D_q, \quad (4.12)$$

$$O_{qL}^T \overline{M}_q \overline{M}_q^T O_{qL} = D_q^2, \quad (4.13)$$

より, CKM 行列 V_L は

$$V_L = O_{uL}^T P(\delta_{uL} - \delta_{dL}) O_{dL}, \quad (4.14)$$

と書ける. 従って, この NNI 型質量行列で, 観測量につながり得るパラメーターの数は, c_1^q , c_2^q , b_1^q , b_2^q , a_q ($q = u, d$) の 10 個と, $\delta_i = (\delta_{uL} - \delta_{dL})_i$ の間の相対位相差の 2 個 (例えば, $\delta_1 - \delta_2$, $\delta_2 - \delta_3$) の 12 個である.

$$\hat{H}_q = \widehat{M}_q \widehat{M}_q^\dagger = P^\dagger(\delta_{qL}) \overline{M}_q \overline{M}_q^T P(\delta_{qL}) \equiv P^\dagger(\delta_{qL}) \overline{H}_q P(\delta_{qL}), \quad (4.15)$$

において, \overline{H}_q の具体形は, (4.11) より

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} c_1^{q2} & 0 & b_2^q c_1^q \\ 0 & b_1^{q2} + c_2^{q2} & a_q b_1^q \\ b_2^q c_1^q & a_q b_1^q & a_q^2 + b_2^{q2} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

と書ける. \overline{H}_q は 5 個のゼロでない独立な要素を持っているので, $(\overline{H}_q)_{ij}$ が決まれば, 逆に $N(\overline{M}_q) = 5$ であるところの \overline{M}_q を完全に決めることができる. 添字の q を略して書けば,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{H_{11}}} \sqrt{H_{11} H_{33} - H_{31}^2}, \\ b_1 &= \frac{H_{23} \sqrt{H_{11}}}{\sqrt{H_{11} H_{23} - H_{31}^2}}, & b_2 &= \frac{H_{13}}{\sqrt{H_{11}}}, \\ c_1 &= \sqrt{H_{11}}, & c_2 &= \frac{\sqrt{\det \overline{H}}}{\sqrt{H_{11} H_{23} - H_{31}^2}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

一方, $(\tilde{H}_q)_{12} = 0$ を満たすエルミート行列 \tilde{H}_q は, 適当に $P(\delta_{qL})$ を選ぶことによって, $(\tilde{H}_q) = P^\dagger(\delta_{qL}) \overline{H}_q P(\delta_{qL})$ を満たす実行列 \overline{H}_q を見つけることができる. なぜなら, 一般に, 3×3 エルミート行列 M が

$$M = P^\dagger \overline{M} P \quad (4.18)$$

のように, 位相行列 P と実行列 \overline{H}_q とに分離して書けるためには

$$\arg(M_{12}) + \arg(M_{23}) + \arg(M_{31}) = 0, \quad (4.19)$$

であればよい. 今の場合, $(\tilde{H}_q)_{12} = 0$ なので, $\arg(\tilde{H}_{q12})$ は自由に選び得るので (4.17) を満たし, 従って \tilde{H}_q から $(\tilde{H}_q)_{12} = 0$ を満たすエルミート行列 \tilde{H}_q さえ得れば, いつでも位相の不定性を除いて, NNI 型質量行列 \widehat{M}_q を得ることができる.

ところで, 一般の (H_u, H_d) は必ず (3.31) の形に書けたので,

$$\begin{pmatrix} \tilde{H}_u \\ \tilde{H}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger D_u^2 A \\ A^\dagger V_L D_d^2 V_L^\dagger A \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

と置くことができる. 問題は

$$(\tilde{H}_u)_{12} = 0, \quad (\tilde{H}_d)_{12} = 0, \quad (4.21)$$

を満たすように、ユニタリー行列 A に条件をつければよい。 3×3 ユニタリー行列のパラメーターは一般には9個であるが、 V_L の rephasing の自由を考えると、3個は V_L に吸収されて、実質的には $N(A) = 6$ である。これに (4.21) なる4個の条件式が置かれるので、残る自由度は2となる。観測量の10個とあわせて12個が $N(\tilde{H}_u) + N(\tilde{H}_d) = 12$ に対応する。

特別のケースとして、 A として直交行列の場合を考えることができる。この場合は $N(A) = 3$ であり、 $AD_u^2 A'$ は real であることは明らかなので、(4.21) の条件式は3つであり、このことは(4.21)式より、 A を観測量のみで書き表すことが可能であることを意味する。この場合はNNI型質量行列 $(\tilde{M}_u, \tilde{M}_d)$ を、unphysical phases の自由を除いて、観測量のみで完全に決定することができる。この方法で、Koide は観測のみで書かれた $(\tilde{M}_u, \tilde{M}_d)$ の一例を得た [11]。しかし、その形は \tilde{M}_u, \tilde{M}_d とともに大きな $\tilde{M}_{ij} \leftrightarrow \tilde{M}_{ji}$ 非対称形を示しているものであった。より一般的な解の探求は Takasugi 達 [12] によってなされているが、必ずしもシンプルで美しい形となる解は見つかっていないようである。

4.3 テクスチャ解析

質量行列の各要素の中で、どのような特定の箇所がゼロであったら実験値をよく再現する質量行列となるかを現象論的に調べるやり方を、テクスチャ解析 (texture analysis) という。これについての系統的な調べは、Ramond, Roberts, Ross [19] によってなされた。彼らは、 (M_u, M_d) がエルミート型である場合に限り、何個にまで $M_{ij} = 0$ ($i \leq j$) とできるかを調べた結果、実験と合わせることでできる質量行列 (M_u, M_d) に入り得るゼロの数は最大5であるということを見つけた。具体的には、次の形である。

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ f^* & e & g \\ 0 & g & d \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ f^* & e & g \\ 0 & g & d \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & b & g \\ 0 & g & a \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ f^* & e & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & g \\ c & g & a \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ f^* & e & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

これらの形 (4.22)–(4.25) は、モデル構築に大きなヒントを与えてくれるであろう。

最近では、前節で述べたNNI型もそうであるが、必ずしも質量行列がエルミート型であることにこだわらなくなって来ているので、この条件をはずして、もう一度同じような系統的テクスチャ解析をやることにも意義があるかもしれない。

また、あるエネルギースケールで、ある特定のテクスチャゼロを持っているも、湯川結合定数の evolution によって、 $\mu = m_Z$ ではそのゼロは消えているかもしれない。evolution の効果も考慮した上でのテクスチャ解析の必要がある。

4.4 デモクラティックベースでの質量行列

メインの項 (dominant term) が

$$M_q = a_q \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \dots \quad (4.26)$$

の形で与えられる質量行列をデモクラティック (democratic) 質量行列と呼ぶ。この名称は Jarlskog[20] によってつけられた。モデルとして最初に考えたのは、Harari, Haut, Weyprs[21] であり、彼等は交換群 (permutation group) S_3 を要求することによって、このタイプ (4.26) の質量行列形を考えた。

一般に任意のエルミート型質量行列

$$M_{ij} = m_{ij} e^{i\phi_{ij}} \quad (4.27)$$

は、デモクラティックベースへの変換行列 A

$$A^T Z A = X, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

を使って

$$\begin{aligned} A^T M A &= m_{33} X + m_{32} (-X + Y + Z) + m_{11} (1 - Y - Z) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_{23} (-X + 2Y - Z) + s_{23} F \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{3}}(m_{12}c_{12} + \sqrt{2}m_{31}c_{31})K + \frac{1}{\sqrt{3}}(m_{12}s_{12} - \sqrt{2}m_{31}s_{31})L \\
& \quad - \frac{1}{\sqrt{6}}[\sqrt{2}m_{12}G(\phi_{12}) - m_{31}G(-\phi_{341})], \tag{4.31}
\end{aligned}$$

$$Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

$$F(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\delta} \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \\ e^{-i\delta} & e^{-i\delta} & 0 \end{pmatrix}, \quad G(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{i\delta} \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \\ e^{-i\delta} & e^{-i\delta} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

$[c_{ij} = \cos \theta_{ij}, \quad s_{ij} = \sin \theta_{ij}]$ と reasing を行うことができる [22]. X, Y, Z, K, L, F, G の7つの行列の内, F と G とは複素数の要素を持つので, $A^T M A$ の自由度は当然のことながら M のそれと同じ $N=9$ である. 任意の現象論的成功を収めた質量行列は, (4.3) によりデモクラティックベースに変更して更考察することができる.

デモクラティック型の質量行列は, 一般論よりも, むしろ特定の形の場合における現象論について調べられている. Koide[23] は,

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

について, Tanimoto[24] は,

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots, \tag{4.35}$$

について, Fritsch, Plankl[25] は

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b \\ b^* & b^* & c \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

について, また Matumoto[26] は

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c \\ c^* & -c^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.37}$$

について調べている. (いずれも現象論としては成功を収めている.) その他, 初期のデモクラティック型質量行列模型の文献は文献 [27] にまとめておく.

この種の模型で注目すべきは, Branco 達 [28, 29] によって提唱された universal strength for Yukawa couplings (USY) の仮説, 即ち, $|M_{qij}|=1$ であって, 位相のみが各要素で異なる

$$(M_q)_{ij} = a_q \exp(i\phi_{ij}^q) \quad (4.38)$$

で与えられるモデルであろう. このモデルは

$$M_q = a_q \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - ia_q \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\Delta_{ij} = \sin \frac{\phi_{ij}}{2} e^{i\phi_{ij}/2}, \quad (4.40)$$

と書くことができる. 彼等 [29] は, 実験値をよく再現してくれるのは

$$M_u = a_u \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 1 & 1 \\ e^{i\beta} & 1 & e^{i\beta} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

$$M_d = a_d \begin{pmatrix} 1 & e^{i\phi} & 1 \\ e^{i\theta} & 1 & e^{i(\theta+\phi)} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

であることを見いだした. しかしながら, このタイプのモデルでは, 数値結果が ϕ_{ij} に非常に敏感であり, しかも湯川結合のエネルギースケールによる evolution は, $(M_q)_{ij}$ の位相を変えるだけでなく, $(M_q)_{ij}$ の大きさそのものも変化させてしまうので, この USY 仮説をどのエネルギースケールで要求したのかをはっきりさせ, evolution の効果を考慮した上で結論を出すべきである. このモデルの現象論チェックは, まだまだやるべきことが残っていると思われる.

5. ニュートリノ質量行列の形態学

ニュートリノ質量行列についての一般論を述べる。シーソー機構が働いている場合など、まだ検討すべき事柄が残されているので、ここでは基本的なことについてのみ解説する。

5.1 マヨラナニュートリノ質量行列と自由度

ニュートリノがディラック粒子である場合は、その議論は3.1節のクォーク質量行列の場合と全く同じになる。多くのモデルでは、ニュートリノはマヨラナ (Majorana) 粒子と考えているので、以下では、ニュートリノはマヨラナであるケースを前提として、議論を進める。

ニュートリノ ν_L^0 の質量項は

$$H_{mass} = \bar{\nu}_L^{0c} M_\nu \nu_L^0 \quad (5.1)$$

によって与えられる。ここで、 ν_L の反粒子場 ν_L^c は

$$\nu_L^c \equiv (\nu_L)^c = C\nu_L^T, \quad \bar{\nu}_L^c \equiv (\bar{\nu}_L)^c = \nu_L^T C, \quad (5.2)$$

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\delta^T = -\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0, \quad (5.3)$$

$$C^\dagger = C^{-1} = C^T = -C, \quad (5.4)$$

によって定義される。一般に、

$$\bar{\psi}_{1L}^c O \psi_{2L} = \bar{\psi}_{2L}^c (C^{-1}OC)^T \psi_{1L}, \quad (5.5)$$

$$\bar{\psi}_{1L}^c O \psi_{2L}^c = \bar{\psi}_{2L}^c (C^{-1}OC)^T \psi_{1L}, \quad (5.6)$$

が成立する。従って、(5.1) で与えられる M_ν は、対称行列

$$M_\nu^T = M_\nu \quad (5.7)$$

となっている (しかし、 $M_\nu^\dagger = M_\nu$ とは限らない)。

(5.1) で与えられる質量行列 M_ν は、ユニタリ行列 $U_{\nu L}$ によって

$$U_{\nu L}^T M_\nu U_{\nu L} = P(\delta_\nu) D_\nu, \quad (5.8)$$

と対角化される。(5.8) の左辺左側の $U_{\nu L}^T$ は $U_{\nu L}^\dagger$ ではないことに注意しよう。位相行列 $P(\delta_\nu)$ は、固有値 $[P(\delta_\nu) D_\nu]_{ij}$ において、 $(D_\nu)_{ij}$ が正となるように定められる。逆に言えば、 M_ν の固有値が正となるように

$$U_{\nu L} \rightarrow U_{\nu L} P\left(-\frac{1}{2}\delta_\nu\right) \quad (5.9)$$

と $U_{\nu L}$ の位相を再定義することができる。この場合、 $U_{\nu L}$ の位相は固定されてしまっており、3.1 節で述べたような位相の自由度 (rephasing の自由) は存在しない。即ち、 $n \times n$ ユニタリー行列 $U_{\nu L}$ の自由度の数 $N(U_{\nu L})$ は、

$$N(U_{\nu L}) = n^2, \quad (5.10)$$

である。一方、荷電レプトンの質量行列を対角化するユニタリー行列 U_{eL} は、rephasing の自由度

$$U_{eL} \rightarrow U'_{eL} = U_{eL} P(\delta_e) \quad (5.11)$$

を持つため、ニュートリノ混合行列 U

$$U = U_{eL}^\dagger U_{\nu L} \quad (5.12)$$

は、

$$U \rightarrow U' = P^\dagger(\delta_e) U, \quad (5.13)$$

なる rephasing の自由を持つ。これに対して、もし、ニュートリノがディラック粒子なら、クォークの場合 (3.15) と同じく

$$U \rightarrow U' = P^\dagger(\delta_e) U P(\delta_\nu), \quad (5.14)$$

なる rephasing の自由を持つ。よって、(5.13) の U では、

$$N(U) = n^2 - n = n(n-1), \quad (5.15)$$

なる自由度を持ち、 CP の破れの位相の数は

$$N_{CP}(U) = n(n-1) - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1), \quad (5.16)$$

となる。 $n=3$ の場合は、 CKM 行列 V が1つの位相のみを含んでいたのに対して、 U では3個独立な位相を含むこととなる。したがって、 U の具体的表示としては、次のように選ぶことが便利である：

$$U = V(\delta) P(\alpha, \beta). \quad (5.17)$$

ここで $V(\delta)$ は、(3.38) [または (3.45)] で与えられる形を持ち、 ν_L へも e_L へも繰り込めない位相 δ を1つ含んでおり、また、 $P(\alpha, \beta)$ は、

$$P(\alpha, \beta) = \text{diag}(e^{i\delta_1}, e^{i\delta_2}, e^{i\delta_3}), \quad (5.18)$$

において、 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ の間の独立な2つの相対位相を α, β と定義する位相行列である。例えば、 $\delta_1 = \alpha, \delta_2 = \beta, \delta_3 = 0$ と選べば、

$$P(\alpha, \beta) = \text{diag}(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, 1), \quad (5.19)$$

であり, U は

$$U = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12}e^{i\alpha} & c_{13}s_{12}e^{i\beta} & s_{13}e^{-i\delta} \\ \left(-c_{23}s_{12} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta}\right)e^{i\alpha} & \left(c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta}\right)e^{i\beta} & s_{23}c_{13} \\ \left(s_{23}s_{12} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta}\right)e^{i\alpha} & \left(-s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta}\right)e^{i\beta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

と書ける.

なお, マヨラナニュートリノは, ていねいに言えば,

$$\omega_L = \nu_L + \nu_L^c, \quad (5.21)$$

によって定義される fields である. 即ち, (5.21) で与えられる ω_L は

$$\omega_L^c = \omega_L, \quad (5.22)$$

を満たす. このとき, (5.1) の対角化

$$H_{mass} = \bar{\nu}_L^c D_\nu \nu_L \quad (5.23)$$

(ここで $P(\delta_\nu) = 1$ となるようすでに $U_{\nu L}$ の位相を固定した) は,

$$H_{mass} = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L^c D_\nu \nu_L + \bar{\nu}_L D_\nu \nu_L^c) = \frac{1}{2} \bar{\omega}_L D_\nu \omega_L, \quad (5.24)$$

と書ける. しかしながら, 質量行列の議論では, (5.23) をわざわざ (5.24) の形に書き直すまでもないので, fields ω_L ではなく fields ν_L の表現のまま議論を進めることにする.

5.2 シーソー型およびシュードディラック型質量行列

ν_L だけでなく, ν_R も考慮に入れて質量行列を書こう. 一般的には

$$H_{mass} = \left(\bar{\nu}_L^0 \quad \bar{\nu}_R^{0c} \right) \begin{pmatrix} M_L & m \\ m^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^{0c} \\ \nu_R^0 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

$$= \left(\bar{\nu}_L \quad \bar{\nu}_R^c \right) \begin{pmatrix} M'_L & 0 \\ 0 & M'_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

と書ける. ここで, m はディラック質量項で, M_L, M_R はマヨラナ質量項である.

$O(M_L) \ll O(m) \ll O(M_R)$ の場合は,

$$M'_L \simeq M_L - m M_R^{-1} m^T, \quad (5.27)$$

$$M'_R \simeq M_R, \quad (5.28)$$

によって与えられる. $M_L = 0$ の場合は, よく知られたシーソー型質量行列 [31] となる.

また, $O(m) \gg O(M_L), O(M_R)$ の場合は, 十分互いに切迫した 2 つの質量レベルを持つ 2 つの状態 ν_+^{ps} と ν_-^{ps} とが現れる:

$$\nu_\pm^{ps} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu_L + \nu_R^c). \quad (5.29)$$

このような ν_{\pm}^{ps} は、シュールドディラック (pseudo-Dirac) 状態 [32] と呼ばれる。むしろ、その質量は

$$m(\nu_{\pm}^{ps}) \sim O(m), \quad (5.30)$$

である。

5.3 ニュートリノ振動

ニュートリノ混合行列 U を具体的に測定する実験の中で、ニュートリノ振動 [33] を観測する手法がよく話題になる。従って、この手法を解説しておく必要がある。

荷電レプトン $e_{\alpha} = (e, \mu, \tau)$ の質量固有状態で、 e_{α} のパートナー $(\nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau})$ を ν_{α} と書く。即ち、ニュートリノ状態 $|\nu_{\alpha}(t)\rangle$ ($\alpha = e, \mu, \tau$) は、弱い位相作用の固有状態である。これに対して、質量の固有状態を $|\nu_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$) と書く。このとき、ニュートリノ状態 $|\nu_{\alpha}(t)\rangle$ の時間依存性は

$$|\nu_{\alpha}(t)\rangle = \sum_i \sum_{\beta} U_{\alpha i} U_{i\beta}^* e^{-iE_i t} |\nu_{\beta}(0)\rangle, \quad (5.31)$$

で与えられる。よって、 $\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}$ なる遷移の確率は

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) = |\langle \nu_{\beta}(0) | \nu_{\alpha}(t) \rangle|^2 = \sum_i \sum_j U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t}, \quad (5.32)$$

で与えられる。

$$\begin{aligned} e^{-i(E_i - E_j)t} &= \cos[(E_i - E_j)t] - i \sin[(E_i - E_j)t] \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{E_i - E_j}{2} t - 2i \sin \frac{E_i - E_j}{2} t \cos \frac{E_i - E_j}{2} t, \end{aligned} \quad (5.33)$$

および

$$\frac{1}{2}(E_i - E_j) \simeq \frac{m_i^2 - m_j^2}{4E_{\nu}} \equiv \frac{\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}}, \quad (5.34)$$

$$L \equiv vt = t \quad (v \simeq c \equiv 1), \quad (5.35)$$

$$\text{Im} \left(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \right) = J \sum_{\gamma} \sum_k \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{ijk}, \quad (5.36)$$

(ここで J はクォークのときの (3.41) と同様にしてレプトンで定義された Jarlskog の rephasing invariant J [2] である) を用いて

$$\begin{aligned} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re} \left(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \right) \sin^2 \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}} \\ &\quad + 4 \sum_{i>j} J \sum_{\gamma} \sum_k \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{ijk} \sin \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}} \cos \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

と書ける。

2つのフレーバーの間の混合のみを考えるときは、(5.37) の $-4\text{Re} \left(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \right)$ が、 $\sin^2 2\theta$ に相当するものとなるので、

$$S_{ij}^{\alpha\beta} \equiv \sin^2 2\theta_{ij}^{\alpha\beta} \equiv -4\text{Re} \left(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \right), \quad (5.38)$$

と書くことにする。また,

$$\eta_{ij}^{\alpha\beta} \equiv \sum_{\gamma} \sum_k \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{ijk} = \pm 1, \quad (5.39)$$

と置く。このとき, (5.37) は

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i>j} \sin^2 2\theta_{ij}^{\alpha\beta} \sin^2 \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}} + 2J \sum_{i>j} \eta_{ij}^{\alpha\beta} \sin^2 \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}}, \quad (5.40)$$

と書ける。

特に消失実験 (disappearance experiment) では,

$$\begin{aligned} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}) &= 1 - \sum_{\beta \neq \alpha} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) \\ &= 1 + 4 \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{i>j} \operatorname{Re} \left(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \right) \sin^2 \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}} - 2J \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{i>j} \eta_{ij}^{\alpha\beta} \sin^2 \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}} \\ &= 1 + 4 \sum_{i>j} \operatorname{Re} \left[U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* (\delta_{ij} - U_{\alpha i}^* U_{\alpha j}) \right] \sin^2 \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}} \\ &= 1 - 4 \sum_{i>j} |U_{\alpha i}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \sin^2 \frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_{\nu}} \end{aligned} \quad (5.41)$$

と表せる。

なお, 3×3 混合行列の場合は, (i, j, k) を $(1, 2, 3)$ の cyclic として,

$$\begin{aligned} S_{ij}^{\alpha\beta} &= 2 \left(|U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 + |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 - |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 \right) \\ &= -2 \left[(1 - |U_{\alpha i}|^2) (1 - |U_{\beta j}|^2) + |U_{\alpha j}|^2 + |U_{\beta i}|^2 - |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta i}|^2 \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

とも書ける。場合によっては, 便利な公式である。

また, \sin^2 に登場する $L\Delta m^2/4E_{\nu}$ なる量は, 具体的には, $L, \Delta m^2, E_{\nu}$ の単位をそれぞれ km, eV², GeV とすると

$$\Theta = \frac{L\Delta m^2}{4E_{\nu}} = 1.27 \frac{L[\text{km}]}{E_{\nu}[\text{GeV}]} \Delta m^2[\text{eV}^2], \quad (5.43)$$

と書ける。参考までに, いくつかの実験での L と E_{ν} および $\Theta \simeq \pi/2$ を与える Δm^2 の値とを表 4.1 に掲げる。

表 5.1 ニュートリノ振動実験のパラメータ値

実験名	反応	$L[\text{km}]$	$E_{\nu}[\text{GeV}]$	$1.27L/E_{\nu}$	$\Delta m^2[\text{eV}^2]$
LSND	$\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_e$	0.03	36	1.03×10^{-3}	1.5×10^3
			~ 60	$\sim 6.2 \times 10^{-4}$	2.6×10^3
CHORUS	$\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}$	0.8	30	3.4×10^{-2}	46
Atmospheric (multiGeV)	$\nu_{\mu} \rightarrow ?$	10 $\sim 1.3 \times 10^4$	1 \sim 10	$1.3 \times (10^1 \sim 10^0)$ $1.7 \times (10^4 \sim 10^3)$	0.12 \sim 1.2 $1.92 \times (10^{-4} \sim 10^{-3})$

5.4 二重ベータ崩壊

ニュートリノ質量行列について、実験的情報を与えるものとして、ニュートリノの放出されない二重ベータ崩壊 (neutrinoless double beta decay) がある。(詳しい解説は、文献 [34] にゆずる。) この実験で押さえることのできる観測量は

$$\langle m_\nu \rangle = \left| \sum_i m_i U_{ei}^2 \right| \quad (5.44)$$

で与えられるニュートリノ荷効質量 (effective neutrino mass) である。(5.44) における和 \sum_i は、軽いニュートリノ ($< 10\text{MeV}$) についてのみ行われる。もし、すべての m_i が軽いなら、荷電レプトンが対角型であるベースのもとで、

$$\langle m_\nu \rangle = \left| \sum_i U_{ei}(D_\nu)_{ii}U_{ie}^T \right| = |(M_\nu)_{ee}|, \quad (5.45)$$

と書ける。

現在の実験的上限 [35] は、

$$\langle m_\nu \rangle < 0.68 \text{ eV}, \quad (5.46)$$

である。

5.5 $\Delta m_{32}^2 \gg \Delta m_{21}^2$ の場合

現在、大気ニュートリノのデータは

$$\Delta m_{atm}^2 \simeq 2.2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad \sin^2 2\theta_{atm} \simeq 1, \quad (5.47)$$

を持ったニュートリノ振動 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ を示しているように見える [9]。(むしろステライルニュートリノ (sterile neutrino) ν_s への振動 $\nu_\mu \rightarrow \nu_s$ の可能性も排除されていない。) また、太陽ニュートリノのデータからは、Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein [36] (MSW) 機構を考えるか、それとも、真空での振動と考えるかによって、次のような Δm^2 と $\sin^2 2\theta$ の値を得ることができる [10]:

MSW 解²

$$\Delta m_\odot^2 = 6.5 \times 10^{-11} \text{ eV}^2, \quad \sin^2 2\theta_\odot = 0.75, \quad (5.48)$$

$$\Delta m_\odot^2 = 4 \times 10^{-6} \text{ eV}^2, \quad \sin^2 2\theta_\odot = 7 \times 10^{-3}, \quad (5.49)$$

真空振動解

$$\Delta m_\odot^2 \simeq 6.5 \times 10^{-11} \text{ eV}^2, \quad \sin^2 2\theta_\odot \simeq 0.75. \quad (5.50)$$

ここで、(5.49) の値は、 $\nu_e \rightarrow \nu_s$ と考えた場合の結果である。

²以前 (~ 1997) は、 $\Delta m_\odot^2 \simeq 10^{-5} \text{ eV}^2$, $\sin^2 2\theta_\odot \simeq 0.8$ という解も知られており、(5.48) の解を small angle solution と呼ぶのに対して、こちらを large angle solution と呼んでいた。現在 large angle solution はほぼ否定されている (完全には除外されていない)。

これらのデータより、3家族モデル (three flavor mixing model) では、 $m_1^\nu < m_2^\nu < m_3^\nu$ として、

$$\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{atm}^2, \quad \Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\odot}^2, \quad (5.51)$$

と見なし、大気ニュートリノのデータは $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ なる振動を、太陽ニュートリノのデータは $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ なる振動を示していると思なすことが自然である³。

観測は $\Delta m_{32}^2 \gg \Delta m_{21}^2$ を示しているので、(5.40) の $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ の計算では、近似的に $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2$ と見なせるので、次のように (5.40) を書くことができる。

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4\text{Re} \left[U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* (U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} + U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1}) \right] \sin^2 \frac{L\Delta m_{32}^2}{4E_\nu} \\ &\quad - 4\text{Re} \left(U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} \right) \sin^2 \frac{L\Delta m_{21}^2}{4E_\nu} \\ &\quad + 4J \sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left[\sum_k (\varepsilon_{32k} + \varepsilon_{31k}) \sin \frac{L\Delta m_{32}^2}{2E_\nu} + \sum_k \varepsilon_{21k} \sin \frac{L\Delta m_{21}^2}{2E_\nu} \right] \\ &= \delta_{\alpha\beta} + 4|U_{\alpha 3}|^2 |U_{\beta 3}|^2 \sin^2 \frac{L\Delta m_{32}^2}{4E_\nu} - 4\text{Re} \left(U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} \right) \sin^2 \frac{L\Delta m_{21}^2}{4E_\nu} \\ &\quad - 4J \sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sin \frac{L\Delta m_{21}^2}{2E_\nu}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

例えば、大気ニュートリノでの混合角 $\sin^2 2\theta_{atm}$ は

$$\sin^2 2\theta_{atm} = 4|U_{\mu 3}|^2 |U_{\tau 3}|^2, \quad (5.53)$$

の情報を与えていることになる。

一方、ニュートリノ質量行列 M_ν は

$$(M_\nu)_{\alpha\beta}^* = (U_\nu D_\nu U_\nu^T)_{\alpha\beta} = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i} m_i^\nu, \quad (5.54)$$

[ここで $U_{\alpha i} = (U_\nu)_{\alpha i}$] より、

$$\begin{aligned} M_\nu^* &= m \begin{pmatrix} U_{e3}^2 & U_{e3}U_{\mu 3} & U_{e3}U_{\tau 3} \\ U_{e3}U_{\mu 3} & U_{e3}^2 & U_{\mu 3}U_{\tau 3} \\ U_{e3}U_{\tau 3} & U_{\mu 3}U_{\tau 3} & U_{\tau 3}^2 \end{pmatrix} \\ &+ \Delta \begin{pmatrix} U_{e2}^2 & U_{e2}U_{\mu 2} & U_{e2}U_{\tau 2} \\ U_{e2}U_{\mu 2} & U_{e2}^2 & U_{\mu 2}U_{\tau 2} \\ U_{e2}U_{\tau 2} & U_{\mu 2}U_{\tau 2} & U_{\tau 2}^2 \end{pmatrix} + m_1^\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

と書ける。ここで、

$$m = m_3^\nu - m_2^\nu, \quad \Delta = m_2^\nu - m_1^\nu, \quad (5.56)$$

³しかし、 $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{\odot}^2$, $\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{atm}^2$ の可能性もむろん排除されていない。

であり, (5.55) の表示には近似を含んでいない. $m \gg \Delta$ のとき, M_ν は近似的に (5.55) で $\Delta \rightarrow 0$ と置いた式で与えられる.

再び, 混合行列 U の表示に話題を戻す. 大気ニュートリノの観測では $\sin^2 2\theta_{atm} \simeq 1$ を示しているので,

$$\sin^2 2\theta_{atm} = 1 - \varepsilon_{atm}^2, \quad (5.57)$$

と置く. このとき, (5.53) より,

$$|U_{e3}|^2 = 1 - (|U_{\mu 3}|^2 + |U_{\tau 3}|^2) < 1 - 2|U_{\mu 3}||U_{\tau 3}| = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon_{atm}^2} \simeq \frac{1}{2}\varepsilon_{atm}^2, \quad (5.58)$$

を得る. 最近のスーパーカミオカンデ (supreKamiokande) での観測データ [9] は, $\sin^2 2\theta_{atm} > 0.82$, 即ち $\varepsilon_{atm}^2 < 0.18$ を示しているので, (5.58) より, $|U_{e3}|^2 < 0.09$, 即ち $|U_{e3}| < 0.3$ を得る. 従って, 今のところ $|U_{e3}| \simeq 0$ と置くほどの強い条件とは言えない.

にもかかわらず, しばしば $U_{e3} = 0$ を与えるモデルがよく提案される. これは, $U_{e3} = 0$ のとき, 混合行列 U の形は, (5.20) で $s_{13} = 0$ と置いた式, 即ち

$$U = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -c_{23}s_{12} & c_{23}c_{12} & s_{23} \\ s_{23}s_{12} & -s_{23}c_{12} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad (5.59)$$

なる簡単な形 (便宜のため, α, β をゼロと置いた) で与えられるからである. そして, θ_{23} は

$$s_{23}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\theta_{atm}} \right) = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_{atm}), \quad (5.60)$$

で与えられる.

また, (5.55) より, $m \gg \Delta$ として Δ の値を無視すれば

$$M_\nu^* \simeq \frac{1}{2}m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

の形が得られる. むろん, この近似形では, $\sin^2 2\theta_\odot$ の値は任意となってしまう. $\sin^2 2\theta_\odot$ の値を決定するには, 次のオーダーの項, Δ の項と ε_{atm} を含む項による形が次に問題となる.

6. 質量行列モデル

この章では、クォークとレプトンに対する何らかのモデルを前提とした上で議論される質量行列模型について述べる。

6.1 モデルの分類

クォーク・レプトンを

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix},$$

と並べるとき、フェルミオン f_i において、水平方向の自由度 $i = 1, 2, 3$ を「世代 (generations)」あるいは「家族 (families)」と呼ぶ。この自由度を対称性として扱うとき、水平対称性 (horizontal symmetry) とも呼ぶ。一方、垂直方向の自由度 $f = \nu, e, u, d$ は、イントラファミリー (intrafamily) の自由度とも呼ぶべきものであるが、まだ適当なニックネームはついていない。 $f = \nu, e, u, d$ の自由度を、フレーバー (flavor) と呼ぶこともあるが、もともとはフレーバーとは、ファミリーとイントラファミリーの両方の自由度を含めた $(u, d, s, c, \dots) = (d_1, d_1, d_2, u_2, \dots)$ に対して用いられた用語である。従って、フレーバーという語は人によって異なる意味で使われるので、注意が必要である。

クォーク・レプトンの質量は、図 2.1 に見るように、大きな階層性がある。この階層性は、 $m_u \rightarrow m_c \rightarrow m_t, m_d \rightarrow m_s \rightarrow m_b$, など水平方向に対する階層性と、イントラファミリーでの階層性 $m_{\nu\tau} \ll m_\tau \ll m_b \ll m_t$ など (それは特に第 3 ファミリーで目立つ) がある。現在のところ、イントラファミリーでの階層性や規則性には、あまり関心が払われていないように見られる。しかしながら、第 3 ファミリーでは $m_t \gg m_b$ であるのに、第 1 ファミリーでは $m_u \sim m_d$ であることなど、イントラファミリーにおける階層性も考えるべき重要な課題の 1 つであろう。

現在、多くのモデル屋たちが取り組んでいるのは、水平方向の階層性についてである。実際、この「世代 (家族)」の起源を探求することは、クォークとレプトンの統一模型にとって、最重要課題であろう。

この水平方向の自由度を考える際に、大きく分けて 2 つの立場がある。

(A) 「家族」と見る立場

水平方向の自由度 (f_1, f_2, f_3) を、対称性の立場から理解を試みる [30]。対称性の極限では、 f_1, f_2, f_3 は互いに対等と考える。見かけ上の大きな質量の違いは、対称性の破れから来ると考える。摂動論的観点からは、こんなに大きな破れがあったのでは対称性の議論ができなくなるが、原理的には対称性を満たす項より満たさない項の方が大きな寄与をするようなことがあっても、構わないはずである。

(B) 「世代」と見る立場

f_1, f_2, f_3, \dots は, そもそもの構造が全く異なると考える. あるいは, $f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3 \rightarrow \dots$ の順序には意味があると考え⁴. 例えば, 対称性を考えるとしても, f_1, f_2, f_3, \dots はそれぞれが群の異なる表現に属すると考える.

最近の傾向は, 後者のカテゴリーに入るモデルが多いように見受けられる. 例えば, 後で紹介する horizontal U(1) symmetry のモデルは, カテゴリー (B) に入る.

なお, Hall と Murayama[37] は, カテゴリー (A) を "Unified", カテゴリー (B) を "Asymmetric" と呼び, 更に第3の立場 (C) "Symmetric" があると主張している. それは, 彼等の S_3 モデル [37] のように, 3 families は symmetric な扱いではあるが, その表現は異なるとする立場である. [我々は, すでにこの (C) をも (B) に含めて分類した.]

6.2 イントラファミリーにおける階層性

$f = u, d, \nu, e$ における階層性についてはあまり関心が払われてはいない. クォーク (u_i, d_i) とレプトン (ν_i, e_i) は, 相似的なところがあるにせよ [38], 本質的には構造の全く異なるものという考えが, SU(5)-GUT[39] の登場で, それらは対等に1つの群表現に並べられることとなった. 即ち

$$\left. \begin{aligned} (d_R^c, e_L^-, -\nu_L) &\sim \mathbf{5}^*, \\ (u_L, d_L, u_R^c, e_R^c) &\sim \mathbf{10} \end{aligned} \right\} \text{ of } \text{SU}(5)_{GUT}, \quad (6.2)$$

と考える. また, $\text{SO}(10)_{GUT}$ では

$$(u_L, d_L, u_R^c, d_R^c, e_L^-, \nu_L, e_R^c, \nu_R^c) \sim \mathbf{16} \text{ of } \text{SU}(10)_{GUT} \quad (6.3)$$

と考える. いつの間にか, クォークとレプトンを同じ表現にまとめて並べることに抵抗感はなくなってしまったが, 本当の所は, クォークとレプトンは対等に並べられるべき存在物なのかも明らかでない.

イントラファミリーに関するいくつかの問題点を並べてみる.

(A) なぜ $m_\nu \ll m_e, m_u, m_d$ か?

最もポピュラーなアイデアは, あらためて紹介するまでもなく, よく知られたシーソーメカニズム [31] である. $\text{SO}(10)$ モデルでは, ステライルニュートリノ (sterile neutrino)⁵ ν_R が存在するので, これが $\text{SO}(10)$ の破れ [例えば $\text{SO}(10) \rightarrow \text{SU}(5)$] によって, 大きなエネルギースケールで M なるマヨラナ質量 (Majorana mass) を持ったとする. ニュートリノの質量行列は

$$(\bar{\nu}_L^0 \ \bar{\nu}_R^{0c}) \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^T & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^{0c} \\ \nu_R^0 \end{pmatrix} = (\bar{\nu}_L \ \bar{\nu}_R^c) \begin{pmatrix} M_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

⁴フェルミオン $f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$ の順序を問題とすると, $u \rightarrow c \rightarrow t$ と考える立場と $t \rightarrow c \rightarrow u$ と考える立場とがある. $m_u \sim m_d$ しかるに $m_t \gg m_b$ である実験事実から考えると, $(u, d) \rightarrow (c, s) \rightarrow (t, b)$ がよさそうに思えるが, 実際に提案されているモデルでは, (t, b) を基本とし, $(t, b) \rightarrow (c, s) \rightarrow (u, d)$ と考えるモデルが多いようである.

⁵sterile neutrinos とは, $\text{SU}(2)_L$ の weak interactions を行うニュートリノを active neutrino と呼ぶのに対応して, そうでないニュートリノをすべて sterile neutrinos と呼ぶ.

と書ける. $O(m) \ll O(M)$ のもとでは, よく知られたシーソー型質量行列

$$M_\nu \simeq -mM^{-1}m^T, \quad M_N \simeq M, \quad (6.5)$$

が得られる. $O(m) \sim 1 \text{ GeV}$ と考えて, $O(m_\nu) \sim 1 \text{ eV}$ を得るには, $O(M) \sim 10^9 \text{ GeV}$ と考えねばならない. しかし, 普通, $\text{SO}(10)$ の破れは, もっと大きなエネルギースケールで起こると考えている.

(B) なぜ $m_i^e = m_i^d$ は成立しないのか?

$\text{SU}(5)$ -GUT モデルでは, その対称性の極限で $m_i^e = m_i^d$ ($i = 1, 2, 3$) を予言する. エネルギースケール $\mu = m_Z$ での実験値 $m_i^e(m_Z), m_i^d(m_Z)$ を unification energy scale $\mu = m_X$ までスケールさせてみると, $m_b \simeq m_\tau$ は悪くはないが, 明らかに $m_s \simeq m_\mu, m_d \simeq m_e$ は成立しない. 代わりに $m_s \simeq m_\mu/3, m_d \simeq 3m_e$ が成立しそうである. そこで, Georgi と Jarlskog[40] は,

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ f' & e & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad M_e = \begin{pmatrix} 0 & f' & 0 \\ f & -3e & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

なる形の質量行列を提案した. ここで M_{22} 成分を与えるヒグスボソンは, $\text{SU}(5)$ -45 から来ると考える. このモデルは $m_b = m_\tau, m_s = m_\mu/3, m_d = 3m_e$ に加えて, GUT スケールで

$$|V_{cb}| = \sqrt{m_c/m_t}, \quad |V_{ub}/V_{cb}| = \sqrt{m_u/m_c}, \quad (6.7)$$

を予言する. 現在の実験値を用いて SUSY くりこみ群方程式を用いると, $|V_{cb}| = 0.050$, および $|V_{ub}/V_{cb}| = 0.059$ が得られるが, 実験値は $|V_{cb}| = 0.0395 \pm 0.0017, |V_{ub}/V_{cb}| = 0.08 \pm 0.02$ であり, Georgi-Jarlskog Texture は否定されたと見るべきであろう [41].

(C) なぜトップクォークだけが $m_t \sim \Lambda_L$ か?

トップクォークを除けば, 残りのクォーク・レプトンの質量については $m_f \ll \Lambda_L = 174 \text{ GeV}$ が成立している. なぜ, トップクォークだけが $m_t \gg m_b, \dots$ であり, かつ, $m_t \sim \Lambda_L$ なのだろうか. はじめから $O(M_u) \gg O(M_d)$ と “by hand” で設定してしまうモデルでは, 今度はなぜ $m_u \sim m_d$ なのかに答えなければならない.

実験事実 $m_f \ll \Lambda_L$ の理解に対しては, ユニバーサルシーソー質量行列模型 [42] というアイデアがある: クォーク・レプトン f を $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$ の $f_L = (2, 1), f_R = (1, 2)$ と見なして, それに加えて, ヘビーフェルミオン $F_L = (1, 1), F_R = (1, 1)$ を仮説的に導入し, それによって

$$(\bar{f}_L^0 \ \bar{F}_L^0) \begin{pmatrix} 0 & m_L \\ m_R & M_F^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R^0 \\ F_R^0 \end{pmatrix} = (\bar{f}_L \ \bar{F}_L) \begin{pmatrix} M_f & 0 \\ 0 & M_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R \\ F_R \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

なる質量行列を考える. $O(m_L) \ll O(m_R) \ll O(M_F^0)$ のとき, クォーク・レプトンの質量行列 M_f は

$$M_f \simeq -m_L(M_F^0)^{-1}m_R, \quad (6.9)$$

で与えられる。このモデルでは、ニュートリノの方は

$$M_U \simeq -m_L(M_N^0)^{-1}m_L^T, \quad (6.10)$$

で与えられるので、 $O(m_L)/O(m_R) = \Lambda_L/\Lambda_R$ が十分小さな値を持てば、 $m_\nu \ll m_e$ を与えることができる。即ち、クォークとレプトンの両方に対して、統一的な理解を与えることができる。

問題は $\Lambda = O(m_L)$ に対して実験事実は $m_t \sim \Lambda_L$ であるという点である。このことは、シーソー近似 (6.9) が成立しないことを意味する。この問題に対しては、Koide-Fusaoka[43]、次いで Morozumi [44] によって、次のようなアイデアが提唱された。アップクォークセクター $F = U$ では、

$$\det(M_U^0) = 0 \quad (6.11)$$

となるようにモデルが設定されているとする。即ち、 M_U^0 を対角型に選ぶベースで、 $m(F_i^0)$ の内の1つはゼロである（それを F_3^0 としよう）。 $i = 1, 2$ に対しては u_{iL} と u_{iR} とがペアを作ってシーソー型質量 (6.9) を持つ。ところが、 $i = 3$ では、 $m(U_3^0) = 0$ であるから、シーソーメカニズムは働かず、 u_{3R}^0 と u_{3L}^0 がペアを作ってオーダー $\Lambda_R = O(m_R)$ の質量を、 u_{3L}^0 と U_{3R}^0 とがペアを作ってオーダー $\Lambda_L = O(m_L)$ の質量を持つことになる。

$$\begin{aligned} u &= (u_L, u_R) \simeq (u_{1L}^0, u_{1R}^0), & m(u) &\ll \Lambda_L = O(m_L), \\ c &= (c_L, c_R) \simeq (u_{2L}^0, u_{2R}^0), & m(c) &\ll \Lambda_L = O(m_L), \\ t &= (t_L, t_R) \simeq (u_{3L}^0, U_{3R}^0), & m(t) &\sim \Lambda_L = O(m_L), \\ t' &= (t'_L, t'_R) \simeq (U_{3L}^0, u_{3R}^0), & m(t') &\sim \Lambda_R = O(m_R), \\ t'' &= (t''_L, t''_R) \simeq (U_{2L}^0, U_{2R}^0), & m(t'') &\sim \Lambda_S = O(M_F), \\ t''' &= (t'''_L, t'''_R) \simeq (U_{1L}^0, U_{1R}^0), & m(t''') &\sim \Lambda_S = O(M_F), \end{aligned} \quad (6.12)$$

よって、トップクォークを $t = (t_L, t_R) \simeq (u_{3L}^0, U_{3R}^0)$ と見なすことにより、なぜ $m_t \sim \Lambda_L$ かを理解することができる。しかしながら、これはあくまで現象論的なモデルであって、 f と F とを統一して理解するモデルの構築や、なぜ $\det M_U^0 = 0$ が起こるのかについては、今のところ満足の行くシナリオは存在しない。

6.3 水平 U(1) 対称性モデル

ファミリー間の対称性（水平対称性）を理解する最もシンプルなそして教育的なモデルは、horizontal U(1) symmetry を考えるモデルである。

このモデルでは、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に加えて、global symmetry $U(1)_X$ を仮定する。ヒグス結合

$$\bar{f}_{iR} \phi f_{jR} \quad (6.13)$$

において、 $U(1)_X$ 荷電 Q が、 $Q(\phi) = 0$ として、

$$Q(\bar{f}_{iR}) + Q(f_{jL}) \equiv n_{ij} \neq 0, \quad (6.14)$$

なら、ヒグスボゾン ϕ は $\bar{f}_{iR}f_{jL}$ には結合できない。そこで、スーパーヘビーフェルミオン F を考え、その質量はヒグスボゾン ϕ_0 による $U(1)_X$ 対称性の破れ $\langle\phi_0\rangle$ によって、 $m_F \sim \langle\phi_0\rangle$ として与えられるとする。更に、ヒグスボゾン $\langle\phi_1\rangle$ を考え、 $\langle\phi_0\rangle > \langle\phi_1\rangle \gg \langle\phi\rangle \sim \Lambda_L$ とする。フェルミオンの $U(1)_X$ 荷電を適当に割り当てることにより、 $U(1)_X$ 不変な effective operator

$$\bar{f}_{iR} \left(\frac{\langle\phi_1\rangle}{\langle\phi_0\rangle} \right)^{n_{ji}} f_{jR}, \quad (6.15)$$

が作れるなら、それに対応して、質量行列 M_f の $(M_f)_{ij}$ 要素に

$$(M_f)_{ij} = g_{ij} \varepsilon^{n_{ji}}, \quad \varepsilon \equiv \langle\phi_1\rangle / \langle\phi_0\rangle, \quad (6.15)$$

なる質量項が登場する。しかし、そのような項が作れないなら（即ち $\Sigma Q \neq 0$ ）、その要素は texture zero となる。4.3 節でテクスチャ解析の紹介をしたが、このような現象論的な解析がなされた背景には、この $U(1)$ モデルがあり、現象論的にはどのような texture zero の存在が好ましいかを調べることによって、どのような $U(1)_X$ 荷電の割り当てが望ましいかを調べるのが目的であった。

このような global $U(1)$ symmetry のアイディアは初め Froggatt, Nielsen [45] によってなされ、その SUSY 版は Laurer, Nir, Seiberg [46] によってなされている。また、global $U(1)$ を Global $U(2)$ に拡張したモデルは Barbieri 達 [47] によってなされている。更に、これを gauge 化して、“anomalous horizontal $U(1)$ symmetrg” としたモデルは Ibáñez 達 [48] によって議論されている。

このように、水平 $U(1)$ モデルは質量行列の各要素を ε のべき乗の形で表現することによって、フェルミオン間の質量の階層性を与えることに成功したが、しかし、まだ問題は残っている。

(1) $Q(f_i)$ は、 f_i が同じ群の表現に属するなら同じ $Q(f_i)$ を与えることは当然のことながら、それ以外にはあまり強い制限はなく、従って現象論でのテクスチャ解析の結果に合うように、“by hand” で数字合わせが可能である。その意味では、現象論以上のコトが言えていない。

(2) M_{ij} を ε のべきで表したと言っても、それはあくまで「オーダーのみを出せばそれで満足」というレベルにすぎない。現実の観測値を説明するには、まだまだ不定性がありすぎる。例えば、

$$m_f \simeq m_0^f \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

なるモデルを得たとしよう。この (6.17) は、だいたいの傾向としてはクォーク質量の階層性をよく表しているように見える。しかし、(6.17) の右辺を、厳密な形として理解するな

ら、その対角化は

$$m_0^f \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \rightarrow m_0^f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

という結果を与える。即ち、3つの f_i の内の1つのみが質量 $m_3^f = m_0^f(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4)$ となり、残りは $m_1^f = m_2^f = 0$ となってしまう。あくまでも (6.17) はオーダーとしての式であり、各 ε^n の前に、具体的にどのような係数がついているかを明らかにしてはじめて、現実的なフェルミオンの質量やファミリー混合が計算可能となる。

(3) この種のモデルは、 M_{33} では $\varepsilon^n = 1$ と選ぶことが多い。この場合は、全体にかかる係数 m_0^f は、 $m_0^u/m_0^d \simeq m_t/m_b$ に選ばねばならず、 $m_t \gg m_b$ の説明ができない。(モデルによっては、 $M_{d33} \simeq m_0^d \varepsilon^n$ において、 $n \neq 0$ と与えて、 $m_t \gg m_b$ を説明しているものもある。)

(4) 現在のところは、主としてクォークの質量行列についての研究がほとんどであり、ニュートリノ質量行列までも統一的に扱ったモデルは少ない。本来は、クォークとレプトンを統一的に扱うモデルのはずであるが、数値的予言に関する限り、あまりうまく行っていない、今後の研究が待たれる。

6.4 荷電レプトンの質量についてのモデル

クォーク質量値にはまだ多少の不定性が残されている（それは主として理論的取扱い・モデル依存性から来る）。しかし、荷電レプトンの質量値にはそのような不定性はなく、精密な数値が得られている。従って、荷電レプトンの質量値に関しては、正確な数値を与えるモデルが要求される。残念ながら、この問題には、ほとんど手がつけられていない。

質量値に関する経験公式としては、有名な Barut の公式 [49] がある⁶。

$$m_n = m_e \left\{ 1 + \frac{3}{2} \alpha^{-1} \left[1^4 + 2^4 + \dots + (n-1)^4 \right] \right\}. \quad (6.19)$$

この公式は、

$$\begin{aligned} m_\mu &= m_2 = m_e \left(1 + \frac{3}{2} \alpha^{-1} \cdot 1 \right) = 105.55 \text{ MeV}, \\ m_\tau &= m_3 = m_e \left(1 + \frac{3}{2} \alpha^{-1} \cdot 17 \right) = 1786.2 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

を与える。実験値 [8]

$$\begin{aligned} m_\mu^{exp} &= 105.658389 \pm 0.000034 \text{ MeV}, \\ m_\tau^{exp} &= 1777.05_{-0.26}^{+0.29} \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

であり、(6.20) の予言と大変よい一致を示す。しかし、今のところ、これは偶然なのかそれとも意味があるのか、よく分かっていない。この一致が意味のあるものとする、質量値は力学的なメカニズムで説明されるべきであり、現在多くのモデルが取り組んでいる群論的構造から出そうという試みは誤った方向を持つということになる。

⁶ $n = 2$ の公式は、Matumoto, Nakagawa[50] によって見いだされた

他の経験公式としては、Koide の公式 [51]

$$m_e + m_\mu + m_\tau = \frac{2}{3} (\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2, \quad (6.22)$$

がある。この公式は荷電レプトンの質量行列が

$$M_e = \left(M_e^{1/2} \right)^2, \quad (6.23)$$

$$M_e^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta \cdot \lambda_3 - \sin \theta \cdot \lambda_8), \quad (6.24)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

($\theta = \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon^2 \ll 1$) で与えられると仮定すれば得られる。即ち、あたかも SU(3)-octet の 2 つの対角行列 (π, η に相当) がほぼ 45° 混合をし、それと SU(3)-singlet 成分 λ_0 とが 45° 混合をすると考えれば、(6.24) の形となり、従って、(6.22) の公式が得られる。このアイデアを具体的に SU(3)-notet Higgs boson によってモデル化したものは Koide-Tanimoto[52] によって与えられている。しかし、このモデルにはまだ検討されるべき理論的課題が残っている。

6.5 その他のモデル

現在、クォーク質量の階層性を説明するためにいろいろのモデルが提案されている。その数はあまりに多く、ここでは谷本 [41] に従って、比較的最近のいくつかの研究を羅列するに留める。

- Orbifold model

Kobayashi[53]

- $Z_k \times Z_Z$ model

Haba-Hattori-Matsuda-Matsuoka[54]

- θ_6 gauged discrete group model

Frampton-Kephart[55]

- $(S_3)^3$ model

Hall-Murayama[37]

- Anti-grand unification model

Froggatt-Lowe-Nielsen[56]

これら多くの質量行列モデルでは、クォーク・レプトン f の質量行列 M_f を、ヒグスボゾン ϕ_L が f に直接に結合することにより (例え、それが effective であるにせよ)

$$(M_f)_{ij} = (y_f)_{ij} \langle \phi_L^0 \rangle, \quad (6.26)$$

として与えられると考えてきた。即ち、クォーク・レプトン質量行列の問題は、湯川結合定数 y_f についての法則性を見つけることであった。しかしながら、6.2節 (C) で紹介したユニバーサルシーソー模型では、クォーク・レプトンの質量行列 M_f は

$$M_f \simeq -m_L M_F^{-1} m_R \quad (6.27)$$

によって与えられる。従って、 M_f の多様性は $m_L = y_{fL} \langle \phi_L^0 \rangle$ だけでなく、 $m_R = y_{fR} \langle \phi_R^0 \rangle$ 、 $M_F = y_F \langle \Phi^0 \rangle$ からももたらされる。Koide-Fusaoka[43] は、 $M_E \propto \mathbf{1}$ と仮定することにより、

$$m_L \propto m_R \propto \text{diag}(\sqrt{m_e}, \sqrt{m_\mu}, \sqrt{m_\tau}), \quad (6.28)$$

として、残りの M_F の構造の違いによって、クォーク質量行列の多様性を出そうとした。また、Morozumi 達 [44] は、これをもっと進めて

$$M_L \propto m_R \propto \mathbf{1} \quad (6.29)$$

として、 M_f の多様性のすべてを M_F に持ち込んだ。この種のモデルでは、クォーク・レプトンの構造よりも、仮説的に導入されたヘビーフェルミオンの構造が重要となる。ある意味では、問題の先送りである。しかしながら、いくつかの注目すべき点 ($m_t \sim \Lambda_L$ の問題など) もあり、このユニバーサルシーソー模型は今後も検討される価値があると思われる。

7. 課題と展望

質量行列模型研究の課題と展望についてまとめる.

7.1 クォーク質量行列模型研究の課題と展望

クォーク質量行列に関しては, 今やオーダーだけを合わせてそれで満足している時代は終わった. クォーク質量行列に関係する観測量についてはほぼ出そろったと見てよい. CKM 行列 V_L について, CP の破れの大きさに関するパラメータ $\sin \delta$ (あるいは $|V_{td}|$) についてはまだ十分な精度で実験値が得られていないが, モデルの骨格を求めるにはもう十分なデータが揃っていると見てよい.

モデルのチェックは, 質量値合わせより, CKM 行列パラメータ $|V_{ij}|$ 合わせ (特に $|V_{ub}|$ を出せるかどうか) に注目すべきであろう. しかし, モデルビルディングにおいて基本として着目すべきはやはり質量スペクトルの特徴であろう.

- (1) $m_u \ll m_c \ll m_t$ および $m_d \ll m_s \ll m_b$.
- (2) $m_t \gg m_b$ しかるに $m_u \sim m_d$.
- (3) $m_t(m_t) \simeq \Lambda_L = 174 \text{ GeV}$ は偶然か?

実験事実 (1) については, 例えば 6.3 節に紹介した水平 U(1) 対称性を考えるモデル (あるいはその発展モデル) がその可能な説明の 1 つである. 各質量行列要素は, ε なるパラメータのべき乗で特徴づけられる. このことは, 近似的に

$$m_c^2 \simeq m_u m_t, \quad m_s^2 \simeq m_d m_b, \quad (7.1)$$

が成り立つことからももっともらしい. この場合, 我々は次のことを考えねばならない.

- (a) 現象の説明を説明するためには何種類の ε の導入が必要か?

例えば, m_u, m_d の値は質量行列の非対角要素からの影響を強く受けるので, 別とすれば, 次の 3 つの量が問題となる.

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= m_c(m_Z)/m_t(m_Z) = 0.00374, \\ \varepsilon_d &= m_s(m_Z)/m_b(m_Z) = 0.0311, \\ \varepsilon &= m_b(m_Z)/m_t(m_Z) = 0.0166. \end{aligned} \quad (7.2)$$

これら 3 つの値 (クォーク質量値は文献 [7] から引用) には何らかの簡単な関係があつて, それは 1 つの量から統一的に記述が可能であろうか? むろん, 水平 U(1) モデルの立場からは, これらの値は $\mu = m_Z$ の値のときを問題にすべきではなく, unification scale $\mu = m_X$ での値を問題にすべきである. 例えば, minimal SUSY で, かつ, $\tan \beta = 10$ の値を採つて見れば

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= m_c(m_X)/m_t(m_X) = 0.00234, \\ \varepsilon_d &= m_s(m_X)/m_b(m_X) = 0.0265, \\ \varepsilon &= m_b(m_X)/m_t(m_X) = 0.00775, \end{aligned} \quad (7.3)$$

となる。この3つの量を1つにまとめられるであろうか？1つの可能性は

$$\varepsilon_u \simeq \varepsilon^{1+\gamma}, \quad \varepsilon_d \simeq \varepsilon^{1-\gamma}, \quad \gamma = 1/4, \quad (7.4)$$

と見ることである。もし、(7.4) が意味があるのなら、クォーク質量行列 (M_u, M_d) は1つのパラメータで（従って1つの U(1) 荷電で）説明可能であろう。しかし、そうでないのなら、複数の U(1) を導入するかそれとももっと大きな群を考えなければならない。

この例からも分かるごとく、我々はモデルビルディングにおいて、次のことに留意しなければならない。

(b) その質量行列はどのエネルギースケールでの物理として考えているのか？

予言値を実験値と比較するとき、いつもこのことを念頭に置かねばならない。特に、5.4節で紹介したデモクラティック質量行列（更に特に問題となるのは位相を持ったデモクラティック質量行列 [28, 29]）においてはこのエネルギー依存性の考察は重要であろう。

着目点 (2) は、もし、「世代」的考えに立つなら、次のことを意味する。

(c) $(u, d) \rightarrow (c, s) \rightarrow (t, b)$ と考えるのか、それとも $(t, b) \rightarrow (c, s) \rightarrow (u, d)$ と考えるのか？もし、後者なら、 $m_u \sim m_d$ をどう説明するのか？

また、着目点 (3) に対する1つの可能性は6.2節で紹介したユニバーサルシーソー模型であるが、むしろ、水平 U(1) モデルでも、 m_t を基本（従って、 ϕ_L^0 の \bar{l}_{LR} への結合は $y_L \simeq 1$ で行われ、それ以外はすべて ε がかかると考えればよい）とすることによっても説明が付く。いずれにせよ、実験事実 (3) は偶然と見るにはあまりにうまく数値が合いすぎており、やはり何か理由があると考えべきであろう。なお、 $y_L \simeq 1$ と大きな値を選ぶモデルでは、そのような大きな値の場合に $\mu = m_Z$ から $\mu = m_X$ まで evolution をさせるとき、湯川結合定数は何か不都合な振る舞い（例えば発散など）を起こさないかチェックが必要である。

もちろん、クォーク質量行列の議論では CP の破れを無視する極限での扱いはもはや許されない。CP の破れのオリジンをどう考えて、 (M_u, M_d) のどこにそれを反映させるかを、モデルとしてはっきりさせる段階に来ている。

クォーク質量行列についての形態学的研究はほぼ終了段階であり、また、モデルについてもこれ以上優劣をつけることはできそうにもない。質量行列研究は、次節に述べるニュートリノ質量行列研究と統一的に行われてこそ更なる発展が期待される。

7.2 ニュートリノ質量行列模型研究の課題と展望

ニュートリノ質量行列についての研究は必ずしもあまり進んでいない。特に、モデルの研究はまだ未発達段階である。それは次の事情による。

(A) 必要な観測量についてのデータが十分ではない。

(B) 形態学的な研究もまだ十分でない。

事情 (A) については、現在刻々と新しいデータが出つつあり、近い将来かなりの物理量が数値的に押さえられるものと思われる。それでもなお、クォーク質量行列におけるよ

うに、すべての観測量が決定されるというには到底なりそうにもない。そのような状況では、単なる現象論的分析よりも、クォーク質量行列との統一性を念頭において、モデルからのアプローチを行うことが効果的と考える。ごく最近、クォーク・レプトンの統一モデルの観点からのニュートリノ質量行列の議論 [57] が盛んになりつつあるのはこのためである。

事情 (B) についても、コメントしておこう。ニュートリノをディラック粒子と考え、かつ、3家族の枠内でモデルを考えるのなら、形態学はクォークのそれとほとんど同じであるが、大抵のモデルではニュートリノをマヨラナ粒子と考えている（その場合は位相の自由度が異なる）ので、あるいは、ステライルニュートリノを含むモデルもあるので、形態学的研究はまだまだやるべきことがある。

ニュートリノ質量行列のモデルを考えるには次のポイントに注目すべきであろう。

- (1) どの実験値を信用し、どの実験値をひとまず無視するか、決心をする。現段階ではすべての実験に合わそうとこだわらない方が無難。
- (2) $m_\nu \ll m_{e,q}$ の説明をシーソーに求めるか、それとも他のメカニズムに求めるか？
- (3) 3家族の枠内でモデルを考えるか、それともステライルニュートリノなどを導入するか？
- (4) 今のところ唯一の信用できそうな実験事実 $\sin^2 2\theta_{\nu\mu\nu\tau} \simeq 1$ を、自然な形で出せるか？（パラメーターにそれを出す領域があるというだけでなく！）
- (5) 荷電レプトンの構造、従って、観測値 (m_e, m_μ, m_τ) がうまく出せるか？（これをインプットとするのではなく。）
- (6) むろん、クォークとの統一性はモデルとしてしっかりしているか？

いずれにせよ、ニュートリノ質量行列の研究はこれから最重要課題となって来るであろう。

7.3 クォーク・レプトン統一質量行列模型研究の展望

クォーク・レプトン統一質量行列模型研究の課題についてはすでに 7.1 節・7.2 節に述べたことと重複する。

統一模型へのアプローチは、一般には次のようなものが考えられる。

- (1) 大統一理論的アプローチ

更には、SU(5)-GUT の流れと Pati-Salam model [58] の流れとに分かれる。
- (2) 非大統一理論的アプローチ

（少なくとも、水平対称性は統一群の中に埋め込まない。）
- (3) 複合模型的アプローチ

現在のところどのアプローチを採るかは研究者の好みの問題である。

しかし、しばしば質量行列模型では、質量とフレーバー混合（CKM 行列、ニュートリノ混合）にのみ関心が行きがちであるが、大切なことは、そのモデルがそれ以外のところで、何をもたらすかである。すなわち、そのモデルの検証はどこでなされるかである。そして、もっとも重要で、かつ、近い将来に観測可能なものは何かを指摘することである。（従

来の質量行列模型研究が「マニアの道楽」としてあまり高く評価されなかったのはこの点がある。) どのモデルでも, FCNC, rare decays, 新粒子の観測, ... など, いろいろの新物理が含まれているはずである. これらを, K物理, B物理, TeV 領域物理につなげて行く努力をすることが, これからの質量行列模型の研究にとって大切であろう.

参考文献

- [1] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1966); M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [2] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55**, 1839 (1985); O. W. Greenberg, Phys. Rev. **D32**, 1841 (1985); I. Dunietz, O. W. Greenberg and D.-d. Wu, Phys. Rev. Lett. **55**, 2935 (1985); C. Hamzaoui and A. Barroso, Phys. Rev. **D33**, 860 (1986).
- [3] G. C. Branco, L. Lavoura and F. Mota, Phys. Rev. **D39**, 3443 (1989).
- [4] Y. Koide, Phys. Rev. **D49**, 2638 (1994).
- [5] e.g., A. Yu. Sumirnov, Phys. Rev. **D48**, 3264 (1993).
- [6] J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Rep. **87**, 77 (1982).
- [7] H. Fusaoka and Y. Koide, Phys. Rev. **D57**, 3986 (1998).
- [8] Particle data group, Eur. Phys. J. **C3**, 1 (1998).
- [9] Super-Kamiokande collaboration, Y. Fukuda, *et. al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [10] e.g., N. Hata and P. Langacker, Phys. Rev. **D50**, 632 (1994).
- [11] Y. Koide, Mod. Phys. Lett. **12**, 2655 (1997).
- [12] E. Takasugi, Prog. Theor. Phys. **98**, 177 (1997); E. Takasugi and M. Yoshimura, Prog. Theor. Phys. **98**, 1313 (1997). Also see, B. Dutta and S. Nandi, Phys. Lett. **B366**, 281 (1996); K. Harayama and N. Okamura, Phys. Lett. **B387**, 614 (1996); T. Ito and M. Tanimoto, Phys. Rev. **D55**, 1509 (1997).
- [13] L. L. Chau and W. Y. Keung, Phys. Rev. Lett. **53**, 1802 (1984); H. Fritzsch, Phys. Rev. **D32**, 3058 (1985); Phys. Lett. **166B**, 423 (1986); H. Harari and M. Leurer, Phys. Lett. **B181**, 123 (1986).
- [14] Y. Koide, Mod. Phys. Lett. **7**, 1691 (1992); G. Belanger, C. Hamzaoui and Y. Koide, Phys. Rev. **D45**, 4186 (1992).
- [15] C. Hamzaoui, Phys. Rev. Lett. **61**, 35 (1988); G. C. Branco and L. Lavoura, Phys. Lett. **B208**, 123 (1988).
- [16] P. Kielanowski, Phys. Rev. Lett. **63**, 2189 (1989); L. Lavoura, Phys. Rev. **D42**, 3230 (1990); P. Kielanowski and P. Krawczyk, Phys. Rev. **D42**, 3232 (1990); G. C. Branco and P. A. Parada, Phys. Rev. **D44**, 923 (1991).

- [17] Y. Koide, H. Fusaoka and C. Habe, Phys. Rev. **D46**, R4813 (1992).
- [18] S. Weinberg, Ann. N.Y. Acad. Sci. **38**, 185 (1977); H. Fritzsch, Phys. Lett. **73B**, 317 (1978); Nucl. Phys. **B155**, 189 (1979); H. Georgi and D. V. Nanopoulos, *ibid.* **B155**, 52 (1979).
- [19] P. Ramond, R. G. Roberts and G. G. Ross, Nucl. Phys. **B406**, 19 (1993).
- [20] C. Jarlskog, in Proceedings of the International Symposium on *Production and Decays of Heavy Hadrons*, Heidelberg, Germany, 1986 edited by K. R. Schubert.
- [21] H. Harari, H. Haut and J. Weyers, Phys. Lett. **78B**, 459 (1978).
- [22] Y. Koide and H. Fusaoka, Phys. Rev. **D48**, 432 (1993).
- [23] Y. Koide, Phys. Rev. **D28**, 252 (1983); **D39**, 1391 (1989).
- [24] M. Tanimoto, Phys. Rev. **D41**, 1586 (1990).
- [25] H. Fritzsch and J. Plankl, Phys. Lett. **B237**, 451 (1990).
- [26] K. Matumoto, Prog. Theor. Phys. **89**, 269 (1993).
- [27] T. Goldman, in *Gauge Theories, Massive Neutrinos and Proton Decays*, edited by A. Perlmutter (Plenum Press, New York, 1981), p.111; T. Goldman and G. J. Stephenson, Jr., Phys. Rev. **D24**, 236 (1981); Y. Koide, Phys. Rev. Lett. **47**, 1241 (1981); Phys. Rev. **D28**, 252 (1983); **39**, 1391 (1989); P. Kaus, S. Meshkov, Mod. Phys. Lett. **A3**, 1251 (1988); Phys. Rev. **D42**, 1863 (1990); L. Lavoura, Phys. Lett. **B228**, 245 (1989); Y. Nambu, in *Proceedings of the International Workshop on Electroweak Symmetry Breaking*, Hiroshima, Japan, (World Scientific, Singapore, 1992), p.1.
- [28] G. C.Branco, J. I. Silva-Marcos and M. N. Rebelo, Phys. Lett. **B237**, 446 (1990).
- [29] G. C.Branco and J. I. Silva-Marcos, Phys. Lett. **B359**, 166 (1995).
- [30] K. Akama and H. Terazawa, Univ. Tokyo, report No. 257 (1976) (unpublished); T. Maehara and T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **60**, 822 (1978); F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **42**, 421 (1979); A. Davidson, M. Koca and K. C. Wali, Phys. Rev. **D20**, 1195 (1979); J. Chakrabarti, Phys. Rev. **D20**, 2411 (1979).
- [31] M. Gell-Mann, P. Rammond and R. Slansky, in *Supergravity*, Proceedings of the Workshop, Stony Brook, New York, 1979, edited by P. van Nieuwenhuizen and

- D. Z. Freedman (North-Holland, Amsterdam, 1979); T. Yanagida, in *Proc. Workshop of the Unified Theory and Baryon Number in the Universe*, edited by A. Sawada and A. Sugamoto (KEK, Tukuba, 1979); R. Mohapatra and G. Senjanovic, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 912 (1980).
- [32] L. Wolfenstein, *Nucl. Phys.* **B185**, 147 (1981); S. T. Petcov, *Phys. Lett.* **110B**, 245 (1982); C. N. Leung and S. T. Petcov, *Phys. Lett.* **125B**, 461 (1983); M. Doi, M. Kenmoku, T. Kotani, H. Nishiura and E. Takasugi, *Prog. Theor. Phys.* **70**, 1331 (1983); J. W. F. Valle, *Phys. Rev.* **D27**, 1672 (1983); J. W. F. Valle and M. Singer, *Phys. Rev.* **D28**, 540 (1983); S. M. Bilenky and B. M. Pontecorvo, *Yad. Fiz.* **38**, 415 (1983) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **38**, 248 (1983)]; D. Wyler and L. Wolfenstein, *Nucl. Phys.* **B218**, 205 (1983).
- [33] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870 (1962).
- [34] M. Doi, M. Kenmoku, T. Kotani, H. Nishiura and E. Takasugi, *Prog. Theor. Phys.* **70**, 1331 (1983).
- [35] M. K. Moe, in *Neutrino 94*, Proceeding of the 16th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, Eilat, Israel, edited by A. Dar *et al.*, [*Nucl. Phys.* **B** (Proc. Suppl.) **38**, 36 (1995)]; A. Balysh *et al.*, in *Proceedings of the 27th International Conference on High Energy Physics*, Glasgow, Scotland, edited by P. J. Bussey and L. G. Knowies (IOP, Bristol, 1995), p. 939, (hep-ex/9502007).
- [36] S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, *Yad. Fiz.* **42**, 1441 (1985); [*Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 913 (1985)]; *Prog. Part. Nucl. Phys.* **23**, 41 (1989); L. Wolfenstein, *Phys. Rev.* **D17**, 2369 (1978); **D20**, 2634 (1979); T. K. Kuo and J. Pantaleon, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 937 (1989). Also see, A. Yu. Smirnov, D. N. Spergel and J. N. Bahcall, *Phys. Rev.* **D49**, 1389 (1994).
- [37] L. J. Hall and H. Murayama, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3985 (1995).
- [38] A. Gamba, R. E. Marshak and S. Okubo, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **45**, 881 (1959).
- [39] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).
- [40] H. Georgi and C. Jarlskog, *Phys. Lett.* **B86**, 297 (1979).
- [41] M. Tanimoto, invited talk at the 52th Annual Meeting of Japan Physical Society, Nagoya, March 30, 1997.
- [42] Z. G. Berezhiani, *Phys. Lett.* **129B**, 99 (1983); *Phys. Lett.* **150B**, 177 (1985); D. Chang and R. N. Mohapatra, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1600 (1987); A. Davidson

- and K. C. Wali, Phys. Rev. Lett. **59**, 393 (1987); S. Rajpoot, Mod. Phys. Lett. **A2**, 307 (1987); Phys. Lett. **191B**, 122 (1987); Phys. Rev. **D36**, 1479 (1987); K. B. Babu and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. Lett. **62**, 1079 (1989); Phys. Rev. **D41**, 1286 (1990); S. Ranfone, Phys. Rev. **D42**, 3819 (1990); A. Davidson, S. Ranfone and K. C. Wali, Phys. Rev. **D41**, 208 (1990); I. Sogami and T. Shinohara, Prog. Theor. Phys. **66**, 1031 (1991); Phys. Rev. **D47**, 2905 (1993); Z. G. Berezhiani and R. Rattazzi, Phys. Lett. **B279**, 124 (1992); P. Cho, Phys. Rev. **D48**, 5331 (1993); A. Davidson, L. Michel, M. L. Sage and K. C. Wali, Phys. Rev. **D49**, 1378 (1994); W. A. Ponce, A. Zepeda and R. G. Lozano, Phys. Rev. **D49**, 4954 (1994).
- [43] Y. Koide and H. Fusaoka, Z. Phys. **C71**, 459 (1996); Prog. Theor. Phys. **97**, 459 (1997).
- [44] T. Morozumi, T. Satou, M. N. Rebelo and M. Tanimoto, Phys. Lett. **B410**, 233 (1997).
- [45] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B147**, 277 (1979).
- [46] M. Leurer, Y. Nir and N. Seiberg, Nucl. Phys. **B398**, 319 (1993); **B420**, 468 (1994).
- [47] R. Barieri, G. Drali and L. J. Hall, Phys. Lett. **B377**, 76 (1996).
- [48] L. Ibáñez and G. Ross, Phys. Lett. **B332**, 100 (1994); P. Binétruy, S. Lavigrac and P. Ramond, Phys. Lett. **B350**, 49 (1995); Nucl. Phys. **B477**, 353 (1996).
- [49] A. O. Barut, Phys. Rev. Lett. **42**, 1251 (1979).
- [50] K. Matumoto and M. Nakagawa, Soryshi-ron Kenkyu (in Japanese) **21**, 679 (1960).
- [51] Y. Koide, Phys. Rev. **D28**, 252 (1983); Z. Phys. **C45**, 39 (1989); Mod. Phys. Lett. **A5**, 2319 (1990).
- [52] Y. Koide and M. Tanimoto, Z. Phys. **C72**, 333 (1996).
- [53] T. Kobayashi, Phys. Lett. **B358**, 253 (1995).
- [54] N. Haba, C. Hattori, M. Matsuda and T. Matsuoka, Prog. Theor. Phys. **96**, 1249 (1996).
- [55] P. H. Frampton and O. C. W. Kephart, Phys. Rev. **D53**, R2293 (1996); Phys. Rev. Lett. **77**, 1699 (1996).
- [56] C. D. Froggatt, G. Lowe and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B414**, 579 (1994); C. D. Froggatt, H. B. Nielsen and D. J. Smith, Phys. Lett. **B385**, 150 (1996).

- [57] H. Bando, T. Kugo and K. Yanagida, Phys. Rev. Lett. **80**, 3004 (1998); J. Sato and T. Yanagida, Phys. Lett. **B430**, 127 (1998); M. Fukugita, M. Tanimoto and T. Yanagida, hep-ph/9809554.
- [58] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. Lett. **31**, 661 (1973); **36**, 1229 (1976); Phys. Lett. **58B**, 333 (1975); Phys. Rev. **D8**, 1240 (1973); **D10**, 275 (1974).