

## Chapter 7

# 量子力学とは？

量子力学の登場によって、それまでの物理学はすべて古典物理学と呼ばれるようになってしまった。(アインシュタインの相対性理論でさえ!) 量子力学とは、古典物理学と比べてどのように根本的な考え方(自然認識)が異なるのかを解説する。

### 7.1 ニュートン力学と量子力学との根本的な相違点

まずはじめに、ニュートン力学と量子力学の違い(特色)を表にまとめてみる。詳しい解説は次の節から行う。以下の表は、次節以降のための目次と考えて、ざっと目を通すだけでよい。

ニュートン力学と量子力学の根本的な相違は、この表の初めにまとめられている点にある。即ち、ニュートン力学では、物理現象(物理量)は、我々がそれを観測するしないにかかわらず、各物理量は1つの定まった値を持つ(「本性上確定」)。我々はそれを観測しなければそれを「知らない」だけであり、観測すればそれが我々にとっての「知った」ものとなる(但し、観測技術上の制約から、「誤差」を伴い、「真の値」から多少離れた答を正しいと思ひ込むかもしれないが)。しかし、量子力学では、物理現象は、「本性上不確定」であり、「観測」を行ったときのみ、「確定」となり、ある観測値が得られる。どのような観測値が得られるかは、確率的にのみ予言可能である。

	ニュートン力学	量子力学	関連する話題
物理量	「本性上確定」	「本性上不確定」 → 「確定」	P. 144
「観測」の役割	「未知」 → 「既知」		
予言力	運動を完全に予言することができる。(技術上の難しさはあるが)	運動は「確率」的にしか予言できない。	P. 143
「物理量」	数値として意味をもつ。	「演算子 (オペレーター)」であり, それ自身は直接には数値を表わさない。	P. 139, P. 142
「法則」	物理量の間を量的な関係を表わす。 (直接, 「観測値」間の関係式を与える.)	物理量の間を質的な関係を表わす。(方程式によって支配されているのは, 「波動関数 $\psi(\vec{r}, t)$ 」 (「状態」) であり, 観測値ではない.)	P. 139, P. 147

### [参考] 量子力学における「確率」

この「確率」を与えるものが、後に述べる「波動関数」なるものである。問題としている粒子の運動を記述する波動関数を  $\psi(x, y, z, t)$  とすれば、その粒子が、位置座標  $(x, y, z)$  近傍の微小体積  $dx dy dz$  の中に見出され確率は、

$$|\psi|^2 dx dy dz$$

で与えられる。この  $|\psi|^2$  のことを「確率密度」と呼ぶ。

この  $\psi$  は、粒子 1 個の運動を記述する波動関数であり、従って、量子力学においては、その粒子 1 個がすでに「確率」的な正確を持っていることに、注目すべきである。

これに対して、古典力学(古典統計力学)で「確率」と言っても、そこでの粒子各々は、確率的な性格を持っているわけではない。個々は、厳厳にニュートンの運動の法則に従って運動していると考えられる。ただ、実験の現象で多数の粒子を一度に取り扱わねばならない場合(熱現象など)、1つ1つの粒子の運動の各物理量を個々に把握することは実際上困難でありしかも実用上あまりその必要もなく、それ故、実際上の便利のため、各粒子の運動が「あたかも偶然に支配されているかのように」考えて、「確率」の数学を利用しているにすぎない。

例えば、水素原子の量子力学的ピクチャのモデルで、よく「電子雲」という言葉が使われる。しかし、これは、水素原子が無数の電子から作られているということではない。量子力学においてもやはり、水素原子に対する認識「原子核(陽子)のまわりをただ 1 個の電子が回っている」は、依然として正しい。ただ、電子の「位置」が、古典力学のときのような意味を持たず、その観測したときの存在位置は確率的にしか予言できず、そこでその「確率密度」をいわば雲という呼び名で形容したにすぎない。また、 $|\psi|^2$  を「確率密度」と呼んだが、これはしばしば誤って「電子が微小体積  $dx dy dz$  に 存在する 確率」と言われる場合があるが、正しくは、後述するよう、「電子が微小体積  $dx dy dz$  に 見出される 確率」と理解すべきである。

## 7.2 [例 1] シュレディンガー方程式

位置エネルギー  $V(x, y, z)$  を持ち、運動量  $\vec{p} = m\vec{v}$  で運動している質量  $m$  の粒子のエネルギー  $E$  は、古典力学では、次のように与えられる。<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = \frac{1}{2m}p^2 + V(x, y, z) \\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z). \end{aligned} \quad (7.1)$$

一方、量子力学では、「運動量の  $x$  成分」 $p_x$  なる物理量は、「演算子」<sup>2</sup>  $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$  で与えられる。

$$p_x \Rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad (7.2)$$

(但し、 $\hbar \equiv h/2\pi$  :  $h$  はプランク定数) (他の成分  $p_y, p_z$  も同様.) .

---

### <sup>1</sup>ベクトルの大きさ

$p^2$  はベクトル  $\vec{p}$  の大きさ  $p$  ( $=|\vec{p}|$  とも書く) の2乗のことであるから、ピタゴラスの定理より

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

が成り立つ。

<sup>2</sup>偏微分: (7.2) 式に登場した微分記号  $\frac{\partial}{\partial x}$  は、「偏微分記号」と呼ばれ、多変数関数 (例えば、 $x$  だけでなく、 $y$  や  $z$  など変数とする関数) を、変数  $x$  に関して微分することを意味する。例えば、

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

では、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + y\frac{\partial x}{\partial x} = 2x + y$$

となる。 $x$  だけの関数に対しては、 $\frac{\partial}{\partial x}$  は  $\frac{d}{dx}$  と同じと考えてよい。

また、

$$\frac{\partial}{\partial x}f \quad (\text{あるいは} \frac{d}{dx}f)$$

は、

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{あるいは} \frac{df}{dx})$$

と同じ意味である。即ち、 $\frac{\partial}{\partial x}$  (あるいは  $\frac{d}{dx}$ ) という記号は、その右側に書かれた関数を  $x$  で微分するという意味である。

なお、後に登場する

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

は、 $x$  について微分したものをもう一度  $x$  について微分するという意味である。即ち、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$$

とも書く。

このように、量子力学では、 $p_x$  なる「物理量」は、単に「 $x$  について微分する」という数学記号にすぎず、これ自身、ある「数値」を意味するものではない。

量子力学的において、「エネルギー」なる物理量は (量子力学では、数値としての  $E$  と区別するため、しばしばそれを  $H$  と書く)、(7.2) を (7.1) の右辺に代入して、

$$E \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \equiv H, \quad (7.3)$$

と表される。この「エネルギー」演算子のことを、しばしば「ハミルトニアン」とも呼ぶ。

量子力学において、(7.1) に代わるべき方程式は、

$$H\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z), \quad (7.4)$$

即ち、

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \right\} \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) \quad (7.5)$$

である。この方程式は、1926 年、オーストリアの Schrödinger によって見い出され、シュレディンガー方程式と呼ばれている。

#### [参考] エネルギー演算子

もう少し、詳しく言えば、量子力学では、「エネルギー」は

$$E \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.6)$$

なる演算子で与えられ、(7.1) 式に対応する量子力学の式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V \right\} \quad (7.7)$$

となる。この式は、むしろ右側に波動関数  $\psi(\vec{r}, t)$  が書かれているものと考え。即ち、

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi \quad (7.8)$$

を略記したにすぎない。この方程式は、<sup>3</sup>

$$\psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (7.9)$$

と書けば、左辺は時間  $t$  についての微分であり、右辺は空間座標  $x, y, z$  についてのみの演算であることを考えれば、

$$E\phi(x, y, z)e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \right\} \phi(x, y, z) \quad (7.10)$$

<sup>3</sup>ここで、 $e$  は、「自然対数の底」と呼ばれ、 $e = 2.718\dots$  なる数である。このような数  $e$  を使って指数関数を表せば、 $y = e^{ax}$  に対し、 $\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$  なる微分公式が成り立つ。

が導け、従って両辺から  $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$  を除けば (かつ,  $\phi(x, y, z)$  を  $\psi(x, y, z)$  と書き直せば), シュレディンガー方程式 (7.5) となる.

この方程式 (7.4) ((7.5) は, エネルギーの「固有値方程式」とも呼ばれ, 「波動関数」 $\psi(x, y, z)$  は, これから解いて求めるべきものであるのは当然のことながら, 右辺の  $E$  も, これから解いて求めるべき「数値」(それを「エネルギー固有値」と呼ぶ) である.<sup>4</sup> 一般に, この方程式は,  $E$  の値がある特定の値をとるときにのみ, それに対応してある関数形  $\psi(x, y, z)$  に対してのみ, 等式が成立するようになっている. このような数値  $E$  と関数  $\psi(x, y, z)$  とは, 一般には複数個の解が存在し, 互いに対応するものと同じ番号をつけて,  $E = (E_1, E_2, E_3, \dots)$  および  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$  と「解」を表すことにする.

例えば, 水素原子の問題を解こうと思うなら, 電子の位置エネルギーは

$$V(x, y, z) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad (7.11)$$

( $e$  は電子の電気量,  $\epsilon_0$  は「真空の誘電率」) であるから, これを (7.5) に代入し, 十分無限遠方 ( $r \rightarrow \infty$ ) で電子の存在確率がゼロであるべしという条件 ( $r \rightarrow \infty$  で  $\psi(x, y, z) \rightarrow 0$ ) を置けば

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = Y_{lm}(\theta, \phi)\phi_n(r) \quad (7.12)$$

なる解が得られる. (証明略. 関数  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  は, 球面調和関数と呼ばれる関数であるが, ここではそれについての説明を略す.)  $\phi_1, \phi_2, \dots$  の具体形は下記の通りであり, それに応じて,  $E$  の値も, 下記のような  $E_1, E_2, \dots$  のときのみ, 方程式 (7.5) が成立する.

$$\begin{aligned} n=1: & \quad \phi_1(r) = 4\sqrt{2}e^{-\frac{r}{a}} & E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \\ n=2: & \quad \phi_2(r) = (2 - \frac{r}{a})e^{-\frac{r}{2a}} & E_2 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \cdot \frac{1}{2^2} \\ n=3: & \quad \phi_3(r) = \left(6 - 6\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2}\right)e^{-\frac{r}{3a}} & E_3 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \cdot \frac{1}{3^2} \\ \vdots & & \vdots \end{aligned} \quad (7.13)$$

但し,  $a \equiv (4\pi\epsilon_0/e^2)(\hbar^2/m)$  であり, また  $e^{-\square}$  として登場する  $e$  は,  $e = 2.718\dots$  なる数, 「自然対数の底」である.

<sup>4</sup>固有値方程式の易しい例は, 次節 7.3 の (7.9) 式に対する脚注を見よ.

この  $E_1, E_2, \dots$  は、まさに Bohr 理論で彼が求めた、電子が  $n = 1, 2, \dots$  番目の軌道にいるときのエネルギーに一致している。(なお、ここに登場する  $a$  という値は、 $n = 1$  のときの軌道の半径“ボーア半径”になっている。)

このように、方程式 (7.4) を解いて得られた数値  $\{E_1, E_2, \dots\}$  は、エネルギー  $E$  を測定したときに我々が観測するであろうところの測定値の組を与えてくれる。(この測定値の内のどれが実際の測定で観測されるかは、後述するように、「確率」的にしか予言できない。) この  $E_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に対応して得られた波動関数  $\psi_{nlm}$  (あるいは  $\phi_n$ ) を、「エネルギー固有値」 $E_n$  に対する「エネルギー固有関数」 $\phi_n$  と呼ぶ。この  $\phi_n$  は、測定すれば必ずエネルギーの測定値として  $E_n$  という数値が得られるという物理的「状態」(「固有状態」と呼ぶ。)を表す波動関数である。

### 7.3 [一般論] 固有値方程式と固有関数

量子力学では、「物理量」はそれ自身「数値」としての意味を持たず、波動関数にかかる「演算子」として与えられる。

一般に、量子力学では、「物理量」はある演算子  $A$  (例えば、「運動量」なら (7.2) 式で、「エネルギー」なら (7.3) 式で) によって与えられる。この  $A$  自身は「数値」としての意味を持たず、「波動関数」 $\psi$  と組み合わせるときにのみ、「数値」 $a$  が得られる。即ち、

$$A\psi = a\psi \tag{7.14}$$

なる方程式を解けばよい。(与えられるのは  $A$  だけで、解くことによって得られるのは、数値  $a$  と関数  $\psi$ 。このようなタイプの方程式を、「固有値方程式」<sup>5</sup> と呼ぶ。)

<sup>5</sup>固有方程式 (7.14) のやさしい具体例として、

$$A = x \frac{d}{dx} \tag{7.15}$$

の場合を考えてみよう。微分公式

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{7.16}$$

を用いれば、

$$Ax^n = x \frac{dx^n}{dx} = x \cdot nx^{n-1} = nx^n \tag{7.17}$$

が成立する。よって、(7.15) のような演算子を満たす関数  $\psi$  は

$$\psi = \{x, x^2, x^3, \dots\} \tag{7.18}$$

一般に、この方程式を解くことによって得られる  $a$  の値は一つではなく、いくつかの値  $\{a_1, a_2, \dots\}$  が得られ、これに対応して関数  $\psi$  も  $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$  なる答が得られる。この  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は、物理量  $A$  を観測したときに得られる観測値の“候補”であり、観測をすれば、この  $\{a_1, a_2, \dots\}$  の内のどれかの値が観測され、それ以外の値が得られるということはない。この  $\{a_1, a_2, \dots\}$  を物理量  $A$  の「固有値」と呼び、 $a_n$  に対応する (7.14) 式の解  $\psi_n$  を固有値  $a_n$  に与える  $A$  の「固有関数」と呼ぶ。 $\psi_n$  で記述される「状態」は、測定をすれば必ず  $a_n$  という測定値を得る状態であり、 $A$  の「固有状態」と呼ぶ。

どの測定値が観測されるかは、「確率」的にのみ予言できる。

一般の「状態」は、必ずしもこのような「固有状態」にあるわけではなく、一般の状態を表す波動関数  $\psi$  は、この固有関数  $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$  を使って、必ず

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots, \quad (7.20)$$

と書き表わすことができる (証明略)。ここに、 $c_1, c_2, \dots$  はある複素数の係数であり、 $|c_1|^2, |c_2|^2, \dots$  は各々 (7.20) 式で与えられる  $\psi$  という状態を観測したときに測定値  $a_1, a_2, \dots$  が得られる「確率」を与えてくれる。

我々は、物理量  $A$  を、 $\psi$  という状態に対して観測したとき、どのような値を得るかは、確率的にのみ予言 (計算) 可能である。即ち、物理量  $A$  の「期待値」 $\langle a \rangle$  (どのような観測値を平均に得るかという量) は、次の計算で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &\equiv a_1|c_1|^2 + a_2|c_2|^2 + \dots \\ &= \int \bar{\psi} A \psi dx dy dz \end{aligned} \quad (7.21)$$

例えば、運動量  $p_x$  のある状態  $\psi$  における期待値を知りたいければ

$$\langle p_x \rangle = -i\hbar \int \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy dz \quad (7.22)$$

の形をしていればよく、またその時の固有値  $a$  は

$$a = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (7.19)$$

で与えられることがわかる。但し、実際の物理において、(7.15) のような演算子に対応する物理量は存在しない。

を計算すればよい.

**[参考] 複素数  $c$  の絶対値  $|c|$**

$|c|^2$  は複素数  $c$  と  $c$  の複素共役  $\bar{c}$  との  $c\bar{c}$  を意味する. 例えば,  $c = 2 + 3i$  なら  $\bar{c} = 2 - 3i$ . よって

$$|c|^2 = c\bar{c} = (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 13$$

のことを意味する.

**[参考] 波動関数の直交規格化**

固有関数  $\psi_n$  は,

$$\int \bar{\psi}_n \psi_m dx dy dz = \begin{cases} 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7.23)$$

となるように定められている. (これを「直交規格化」と言う.) 従って, (7.20) 式で与えられる  $\psi$  に対しては,

$$\begin{aligned} A\psi &= A(c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots) \\ &= c_1A\psi_1 + c_2A\psi_2 + \dots \\ &= c_1a_1\psi_1 + c_2a_2\psi_2 + \dots, \end{aligned}$$

であり (最後の式変形では, (7.14) 式を用いた.), よって (7.21) 式は,

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \int (\bar{c}_1\bar{\psi}_1 + \dots) (c_1a_1\psi_1 + c_2a_2\psi_2 + \dots) dx dy dz \\ &= a_1\bar{c}_1c_1 \int \bar{\psi}_1\psi_1 dx dy dz + a_2\bar{c}_1c_2 \int \bar{\psi}_1\psi_2 dx dy dz + \dots \\ &= a_1|c_1|^2 + a_2|c_2|^2 + \dots \end{aligned} \quad (7.24)$$

となる. 即ち,  $a_n$  の値が観測される確率  $|c_n|^2$  を値  $a_n$  に乗じたものが, すべての  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) について足し算されており, 従って, 物理量  $A$  の観測値  $\{a_1, a_2, \dots\}$  の期待される平均値を与えてくれていることがわかる.

なお, 各固有状態  $\psi_n$  が実現される確率  $|c_n|^2$  の, すべての  $n$  についての和は 1 でなければならないので,

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots = 1 \quad (7.25)$$

なる関係式が成立する. 即ち

$$\int \bar{\psi}\psi dx dy dz = 1 \quad (7.26)$$

となっている. ( $\langle A \rangle$  の証明の式で  $a_1 = a_2 = \dots = 1$  と置いた式に対応.)

## 7.4 [一般論] 観測の役割

量子力学においては, 物理量は「本性上不確定」である.

(7.20) 式で与えられる一般の状態に話を戻そう. 観測をする前の状態が  $\psi$  であり, この状態に対して物理量  $A$  の観測を行い, 例えば  $a_3$  という観測値が得られたとする.

このとき、状態  $\psi$  は、この行為により

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3 + c_4\psi_4 + \cdots \Rightarrow \psi_3 \quad (7.27)$$

と変化する。（「観測」という行為により、「状態」が変わってしまうということに注意。）どのような確率でこの  $a_3$  という値が観測されるかは、(7.20)における  $\psi_3$  の係数  $c_3$  から計算される  $|c_3|^2$  を見ればよい。言い換えれば、 $|c_3|^2$  は、状態  $\psi$  から状態  $\psi_3$  への“飛び移り”（これを「遷移」と言う）の確率を与えてくれる。

$\psi_3$  の状態は、物理量  $A$  を観測すれば必ず  $a_3$  なる値を得るという状態であるから、古典論的イメージが考えやすい。一般の状態 (7.20) は、古典論的イメージからは理解しにくい。この状態  $\psi$  は、観測をすれば  $\{a_1, a_2, \dots\}$  の値の内のどれかが確率  $\{|c_1|^2, |c_2|^2, \dots\}$  で実現するような状態であるが、だからと言って、すでにその状態  $\psi$  が  $\{a_1, a_2, \dots\}$  の内のどれかの値を1つ実際に持っていてしまっているというわけではない。状態 (7.20) は、 $\{a_1, a_2, \dots\}$  のどの値というふうに定まった値を持っているのではなく、どの値をとるかなどは、「本性上不確定」といわざるを得ない。

水素原子の場合を例にとれば、次のようになる。エネルギー固有関数  $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$  を、それらは各々 Bohr 理論の電子軌道  $n = 1, 2, \dots$  に電子が存在している状態を表すというふうに、古典論的イメージを持たせてもよい。実際、もし電子の波動関数がある時刻に  $\psi_2$  という状態になっていたとすれば、Bohr 理論で言うところの電子が「第2軌道」に居るときと同じエネルギー値  $E_2$  を、その観測値として得る。ところが、一般の状態、例えば、

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 \quad (7.28)$$

では、観測をすれば、 $E_1$  という値かまたは  $E_2$  という値の内のどちらかが、各々  $\frac{1}{2}$  の確率で、観測されるような状態を示している。この (7.28) は、電子が「第1軌道または第2軌道のどちらかに、各々  $\frac{1}{2}$  の確率で存在している」ということを示しているわけではない。まして、「1個の電子が半分づつに分かれて、片方が第1軌道、もう片方が第2軌道を回っている」ということを示しているわけでもない。（この  $\psi$  は、あくまで電子1個の状態を記述するものであるということに注意せよ。）むしろ、(7.28) は、「電子が第1軌道と第2軌道の間軌道を回っている」ことを示しているのでもない。そもそも (7.28) を、古典論的ピクチュア「電子が1個なら、必ずそれはどれか1つの定まった軌道の上に居て、そしてエネルギーを観測すれば、 $E_1$  か  $E_2$  の値を得るのなら、観測をし

ようとしまいと、電子は第1軌道か第2軌道かそのどちらかに必ず居たにちがいない」で解釈しようとすることに無理がある。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \text{Diagram 1} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \text{Diagram 2} \right) = \left( \text{Diagram 3} \right) ? \text{ or } \left( \text{Diagram 4} \right) ?$$

図 7-2 量子力学的状態  $\psi = \psi_1/\sqrt{2} + \psi_2/\sqrt{2}$  はどのようなピクチャに対応するか？

(7.28) の状態では、エネルギー観測値は  $E_1$  とも  $E_2$  とも別に定まっているわけではなく (「本性上不確定」), 観測をしたときのみ、各々  $\frac{1}{2}$  の確率で、状態 (7.28) が状態  $\psi_1$  または状態  $\psi_2$  に移り変わり、従って、 $E_1$  という値が得られる「現象」かまたは  $E_2$  という値が得られる「現象」のどちらかに現象が「確定」する。(このとき、測定直後の状態は、もはや  $\psi$  ではなく、 $\psi_1$  または  $\psi_2$  に変わってしまっている.)

但し、我々は、「本性上不確定」という言葉から、電子力学では全く運動に法則性がなくなってしまったと、誤解してはならない。「状態」 $\psi$  は、依然として、方程式 (例えば、シュレディンガー方程式) に支配されており、決してあいまいな無法則性のものではない。水素原子の例では、例えばある時刻における電子の状態が (7.28) であるとすれば、この「状態」自身は決してあいまいなものではなく、まさに明確に定まった1つの「状態」である (この「状態」(7.28) は、エネルギー値を  $E_1$  とも  $E_2$  とも定まった値を持ってはいないにもかかわらず!). しかし、古典物理学と異なる点は、量子力学ではこの「状態」という概念と「観測をしたときに  $\bigcirc\bigcirc$  という数値が得られる」ということを区別した点である。古典物理学の「状態」は、各物理量がそれぞれある1つの値 (数値) をとっていることを意味した (例えば、「運動量  $p = 3 \text{ kgm/sec}$  の状態」). ところが、量子力学での「状態」は、例えば、(7.28) のように、「状態」としては1つに決まっても、その数値は  $E_1$  とも  $E_2$  とも決まっていない場合がある。 $E_1$  と  $E_2$  の内のどちらが「現象化」するかは、「本性上確定」なことであり、「観測」によってはじめて  $E_1$  なり  $E_2$  なりのどちらかの値 (現象) が「確定」する。そして、どの値が確定するかは、我々は「確率」的にしか予言できない。逆に言えば、確率的にしか予言できないのは、「観測によってどの現象<sup>6</sup> (観測結果) が得られるか」であって、「どのよう

<sup>6</sup>このページで、しばしば「状態」と区別して「現象」という言葉を使ってきたが、この「現象」なる

な状態 (量子力学的意味の) が存在するか」は量子力学の方程式に従って完全に予言可能 (ある意味で「決定論」的に) である。即ち、本性上不確定なのは、「観測の結果得られる測定値」なのであり、「状態」ではないことに留意すべきである。

## 7.5 [例 2] 「位置」と「運動量」の量子力学的関係

量子力学の特徴を理解する上で有用な、もう 1 つの例をあげよう。

量子力学のどの教科書でも、必ず

$$xp_x - p_x x = i\hbar \quad (7.29)$$

なる関係式が登場する。一見、この式の左辺は、[(位置) × (運動量) - (運動量) × (位置)] であるから、ゼロとなりそうなものなのに、この式の右辺はゼロではない値を持っている。

量子力学においては、この式は大変重要な意味を持つ。量子力学の教科書によっては、この式を量子力学の出発点となるべき式と見なして、この式から、運動量  $p_x$  の演算子表示

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (7.30)$$

が出てくるとして、量子力学の理論体系をまとめているものも見られるほどである。

ここでは、その逆の証明、即ち、(7.30) であれば (7.29) が成り立つということを示そう。

そのためには、量子力学に登場する物理量はすべて「演算子」で与えられ、そこに書かれた関係式は、その右側に波動関数が書かれているものとみなさなければならないということを思い起こそう。即ち、(7.29) は、ていねいに書けば、

$$(xp_x - p_x x)\psi = i\hbar\psi \quad (7.31)$$

となる。(普通は、わかりきっているので、この波動関数  $\psi$  を省略する。)

話を簡単にするために、 $\psi$  は  $x$  のみの関数としよう。偏微分記号  $\frac{\partial}{\partial x}$  は、普通の微分 (全微分) 記号  $\frac{d}{dx}$  と同じと思ってよい。(7.31) の左辺は、次のように式変形できる。

$$(xp_x - p_x x)\psi(x) = -i\hbar \left\{ x \frac{d}{dx} \psi(x) - \frac{d}{dx} x \psi(x) \right\}$$

用語は、誤解を与える恐れがあり、適切ではないかもしれない。ここでは、古典的ピクチャと同じように、我々が観測の結果ある 1 つの数値を得るという場合を、簡単に「現象」と呼んできた。

$$= -i\hbar \left\{ x \frac{d\psi}{dx} - \frac{d(x\psi)}{dx} \right\} = -i\hbar \left\{ x \frac{d\psi}{dx} - \left( x \frac{d\psi}{dx} + \psi \right) \right\} = +i\hbar \psi(x). \quad (7.32)$$

よって, (7.31) の右辺と一致することが証明された. ここで

$$\frac{d}{dx} x\psi(x)$$

は, この微分記号  $\frac{d}{dx}$  は,  $x$  や  $\psi(x)$  の一方だけにではなく, この演算子の右側すべての量をひとまとめにして, 全体として微分する, 即ち

$$\frac{d(x\psi(x))}{dx}$$

ということであることを注意せよ.

## 7.6 [一般論] 同時観測不可能な物理量の組

量子力学においては, 2つの物理量について, その両者の観測値を同時に正確に定めるということが, 不可能の場合がある.

一般に, 2つの物理量  $A, B$  において

$$AB - BA \neq 0 \quad (7.33)$$

であるときには, この2つの物理量  $A, B$  を同時に観測して両者の測定値を正確に定めようとすることは, 原理的に不可能である. 言い換えれば, (7.33) 式が存在する2つの物理量  $A, B$  に対しては, それら2つの物理量  $A, B$  の「同時固有状態」は存在しない.

**【証明】** もし,  $A, B$  の同時固有状態 (即ち, その「状態」 ( $\phi$  と書こう) で物理量  $A$  を観測すれば必ず決まったある1つの値  $a$  を得, またその「状態」  $\phi$  で物理量  $B$  を観測すれば必ず決まったある1つの値  $b$  を得る) が存在するものとしよう.  $\phi$  が  $A$  と  $B$  両方にとって固有関数となっているということは,  $\phi$  が

$$\begin{aligned} A\phi &= a\phi \\ B\phi &= b\phi \end{aligned} \quad (7.34)$$

という2つの固有値方程式を, 同時に満たすということを意味する. そこで, (7.34) 式を順に使えば,

$$\begin{aligned}
 AB\phi &= A(B\phi) = A(b\phi) = bA\phi = ba\phi \\
 BA\phi &= B(A\phi) = B(b\phi) = aB\phi = Ab\phi
 \end{aligned}
 \tag{7.35}$$

を示せる. ここで,  $AB$  と  $BA$  は,  $A$  と  $B$  とが「演算子」なので一般には勝手に順序を換えてはいけませんが,  $a$  や  $b$  は単なる「数値」なので  $A$  や  $B$  を飛び越えて自由な場所に持って来てよい. (7.35) より

$$(AB - BA)\phi = (ba - ab)\phi \tag{7.36}$$

が得られるが, この右辺の  $a$  と  $b$  は単なる数値なので  $ab = ba$  であり, よって (7.35) の右辺はゼロとなる. しかるに, そもそも (7.33) 式の条件があったので, これは明らかに矛盾である. それ故, はじめの仮定「(7.33) の条件があるにもかかわらず,  $A$  と  $B$  の両方に対する同時固有関数が存在する」が誤りであり, 「条件 (7.33) が存在するときには,  $A$  と  $B$  の同時固有関数は存在しない。」という結論を得る.

**[参考] 交換関係**

$AB - BA$  のことを, しばしば  $[A, B]$  と書き, 「交換積」と呼ぶ. 即ち

$$[A, B] \equiv AB - BA \tag{7.37}$$

例えば, (7.29) 式は

$$[x, p_x] = i\hbar \tag{7.38}$$

と書いたりもする.

$[A, B] = 0$  なる 2 つの物理量  $A, B$  は「可換」と言い,  $[A, B] \neq 0$  なる場合は, 「非可換」とあると言う.

このことは,  $A$  を観測して 1 つの値  $a$  を正確に決めようとするれば, そのとき「状態」は  $A$  の固有状態にはあるが, そのかわり, 同時には  $B$  の固有状態であることはできず,  $B$  を同時に測定したとしてもその測定値は全く不確定になってしまう. 逆に,  $B$  を観測して 1 つの値  $b$  を正確に決めようとするれば, 今度は  $A$  の測定の方で不確定さが現れてしまう.

例 (7.29) の場合は, 「位置」  $x$  と 「運動量」  $p_x$  とが, 同時測定不可能な物理量であることを意味し, (7.29) 式から, 量子力学においても, ハイゼンベルクの不確定性関係

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{7.39}$$

が導ける.(証明略)

[参考] 非可換な物理量の他の例

$[A, B] \neq 0$  であるような物理量の他の例として、代表的なものに、次のようなものがある。

・時間  $t$  とエネルギー  $E$

$$[t, E] = -i\hbar \quad (7.40)$$

( $E$  の演算子表示は、P.4 の [参考] を見よ.)

・角運動量  $\vec{L}$  の 3 つの成分  $L_x, L_y, L_z$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \end{aligned} \quad (7.41)$$

(この関係は、古典力学での  $L_x, L_y, L_z$  の定義

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= zp_x - xp_z \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad (7.42)$$

に対して、(7.29) の交換関係 ( $y, z$  に対しても同様) を用いてやれば証明できる.) 従って、 $\vec{L}$  の 3 つの成分の内の 1 つを定めれば (観測で)、残りの他の 2 つの成分の値は完全に不確定となる。しかし、

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (7.43)$$

で定義される “角運動量の大きさ”  $L$  の 2 乗は、

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0 \quad (7.44)$$

を満たすことが示せる。従って、 $L_x, L_y, L_z$  の 3 つを同時に観測して値を決めることはできないが、この内の 1 つ (普通は習慣として  $L_z$  を選ぶ) と  $L^2$  とに対してなら、この 2 つを同時に観測して値を決めることが可能である。

なお、 $L_z$  および  $L^2$  は、その同時固有関数  $\psi$  に対して

$$L_z \psi = m\hbar \psi \quad (7.45)$$

$$L^2 \psi = l(l+1)\hbar^2 \psi \quad (7.46)$$

なる形で、固有値を持つことが知られている。ここで  $l$  はある正の整数 ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) (または  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ) で、 $m$  は

$$m = l, (l-1), (l-2), \dots, -(l-2), -(l-1), -l \quad (7.47)$$

なる  $(2l+1)$  個の値が選び得る。

## 7.7 量子力学における「状態」：1 つの例え話

すでに 7.4 や 7.6 で解説してきたように、量子力学を理解する上で最も大切なことは (そして最も量子力学の難解な点は)、量子力学におけるこの「状態」という概念を理解することである。

量子力学における「状態」という概念をもう少し理解してもらうために、1つの例え話で解説してみよう。「例え話」と断ったのは、以下に登場する演算子  $A, B$  は現実の物理量に対応せず、その固有関数  $\psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$  も実は量子力学で要求されるすべての条件を満たしているわけではない。しかし、抽象的な話のみでは「状態」という概念を正しく理解するとは難しいので、この節では簡単な具体的数式例をもとに、解説を試みることにする。

(7.20) 式で述べた、一般の状態  $\psi$  は、固有関数  $\psi_1, \psi_2, \dots$  を使って

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots$$

と書き下せるとは、例えば次のようなことを言う。

問題の一般のある状態を表す波動関数  $\psi$  を

$$\psi = \frac{3x + 4x^2}{5} \tag{7.48}$$

としよう。

これに対して、ある物理量  $A$  の、固有値  $a_1, a_2$  に対応する固有関数が

$$\begin{aligned} \psi_1 &= x, \\ \psi_2 &= x^2, \end{aligned} \tag{7.49}$$

で与えられるとする。

(7.49) 式は、演算子  $A$  を

$$A = x \frac{d}{dx} \tag{7.50}$$

で定義すれば、公式

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \tag{7.51}$$

より

$$Ax^n = nx^n \tag{7.52}$$

となり、確かに (7.50) 式で与えられる物理量の固有関数  $\psi_n$  は、 $\psi_1 = x, \psi_2 = x^2, \psi_3 = x^3, \dots$  であり、その固有値は  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \dots$  となる。しかし、実際に (7.50) 式で与えられるような現実の「物理量」は存在しない。これは、計算をわかりやすくするために、固有関数  $\psi_n$  としてできるだけ単純な関数形がくるようにしたため

あり、あくまで (7.49) 式, (7.50) 式は, 展開式 (7.20) の説明のための, 1 つの例え話として持ち込んだものにすぎない.<sup>7</sup>

この固有関数 (7.49) を使えば, 状態 (7.48) は,

$$\psi = \frac{3x + 4x^2}{5} = \frac{3}{5}\psi_1 + \frac{4}{5}\psi_2 \quad (7.53)$$

と書ける. このことは, 状態  $\psi$  を物理量  $A$  について観測すれば,  $\frac{9}{25}$  の確率で  $a_1$  という値を得, また  $\frac{16}{25}$  の確率で  $a_2$  という値を得るということを示している.

ところで, 別な物理量  $B$  があって, その固有値  $b_1, b_2$  に対応する固有関数  $\phi_1, \phi_2$  を

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{x - x^2}{\sqrt{2}}, \\ \phi_2 &= \frac{x + x^2}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (7.54)$$

としよう. このような (7.54) を固有関数とする演算子  $B$  は, 例えば

$$B = x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} - x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} \quad (7.55)$$

によって与えられ,  $\phi_1, \phi_2$  に対応して  $b_1 = +1, b_2 = -1$  を導く, 但し, (7.55) もまた便宜上の式であって, 実際に (7.55) に対応する物理量は存在しない. 以下の話では, 演算子  $A, B$  の具体形は意味がなく, 単に, (7.49) および (7.54) で与えられる固有関数があるという前提のもとで, 話を進める.

(7.49) および (7.54) より,  $\psi_1, \psi_2$  と  $\phi_1, \phi_2$  とは互いに

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2, \\ \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2, \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2, \\ \psi_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2, \end{aligned} \quad (7.57)$$

なる関係がある.

<sup>7</sup> しかもこの関数 (7.49) は, 固有関数に要求される「直交規格」条件 (7.23) 式を満たさない.

よって、状態 (7.48) は、(7.53) に (7.57) を代入することによって、

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{3}{5} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2 \right) + \frac{4}{5} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2 \right) \\ &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{7}{5\sqrt{2}}\phi_2\end{aligned}\quad (7.58)$$

とも書ける。これは、状態 (7.48) を、物理量  $B$  について観測するとき、 $b_1, b_2$  という値を得る確率がそれぞれ  $\frac{1}{50}, \frac{49}{50}$  であることを示している。

しかしながら、状態 (7.48) そのものは、物理量  $A$  についても、物理量  $B$  についても、あらかじめ定まった値を持っている訳ではないことに注意しよう。(例えば、物理量  $A$  について、あらかじめ2つの値  $a_1, a_2$  という値を持っていると考えたり、あるいは  $a_1$  と  $a_2$  の中間のある1つの値を持っていると考えてはならない。) 観測という行為をしない限り、物理量  $A$  についても、物理量  $B$  についても、不確定の状態にある。

もし、状態 (7.48) について、「物理量  $B$  を観測する」という行動を行ったときのみ、状態 (7.48) は、(7.58) 式からわかるごとく、 $\frac{1}{50}$  または  $\frac{49}{50}$  の確率で、状態  $\phi_1$  または  $\phi_2$  へと「遷移」する。例えば、ある時の  $B$  の観測で、

$$\psi \equiv \frac{3x + 4x^2}{5} \xrightarrow{B \text{ を観測}} \psi' = \frac{x - x^2}{\sqrt{2}} = \phi_1 \quad (7.59)$$

となる。(  $\phi_1, \phi_2$  のどちらの状態が実現されるかは、確率の問題であり、時には確率の小さい方の状態が (7.59) のように登場することもあることに注意。)

ところで、(7.59) の  $\psi'$  なる状態は、 $B$  を観測すれば必ず  $b_1$  という1つの値を確定的に得る。従って、古典論的描像が一見可能である。しかし、 $\phi_1$  は (7.56) のように与えられたので、この状態  $\psi' = \phi_1$  は、 $A$  の固有状態ではなく、 $A$  を観測すれば各々  $\frac{1}{2}$  の確率で  $a_1$  または  $a_2$  の結果が実現されるにすぎなく、状態  $\psi' = \phi_1$  自身は、物理量  $A$  に関しては不確定のままである。

同様に、状態  $\psi_1, \psi_2$  は、物理量  $A$  については確定した1つの値を持つが、物理量  $B$  については不確定のままである。

物理量  $A$  を電子の「位置」、物理量  $B$  を「運動量」と考えて見よう (図 7-3)。(実際の (7.50) 式、(7.55) 式は、それらの物理量に対応しないのであるが。)

物理量	固有関数	固有値	固有状態
A	$\psi_1 = x$	$A = a_1$	
(位置)	$\psi_2 = x^2$	$A = a_2$	
B	$\phi_1 = \frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$	$B = b_1$	$\Rightarrow$
(運動量)	$\phi_2 = \frac{x+x^2}{\sqrt{2}}$	$B = b_2$	$\Leftarrow$

図 7-3 物理量 A(位置) と物理量 B(位置) の固有状態の物理的ピクチャ

古典論では、電子 1 個が存在すれば、1 つの位置座標の値と 1 つの運動量 (速度) の値とを必ず持っていた (図 7-4). 例えば,  $(A = a_1, B = b_1), (A = a_2, B = b_1)$  などと.

	物理量	状態
(1)	$A = a_1, B = b_1,$	
(2)	$A = a_1, B = b_2,$	
(3)	$A = a_2, B = b_1,$	
(4)	$A = a_2, B = b_2,$	

図 7-4 古典物理学における「状態」:

もし物理量 A,B が  $A = a_1$  または  $A = a_2$  および  $B = b_1$  または  $b_2$  のそれぞれ 2 つの値しかとれないようなケースでは、古典物理学での「状態」とは、A は  $a_1, a_2$  のいずれか一方の値を必ずただひとつ、また B も、 $b_1, b_2$  の必ずいずれか一方の値を必ずただひとつとる.

しかし、量子力学では、A または B の一方だけを確定したような状態のみが可能である。即ち、位置座標 A について 1 つの値に確定したような状態 ( $\psi_1$  または  $\psi_2$ ) は、運

動量  $B$  については全く不確定となり, 逆に運動量  $B$  について1つの確定した値をとる状態 ( $\psi_1$  または  $\psi_2$ ) は, 位置座標  $A$  の測定値については全く不確定となる. そして更に一般の状態  $\psi$  (7.48) では, 位置座標も運動量も不確定のままである (図 7-5).

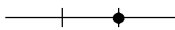
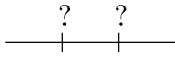
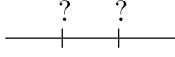
波動関数	固有関数による展開	固有値	状態
(1) $\psi = x^2$	$=\psi_2$	$A=a_2$	
	$=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2$	$B=\text{不確定}$	?
(2) $\psi = \frac{x+x^2}{\sqrt{2}}$	$=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2$	$A=\text{不確定}$	
	$=\phi_1$	$B=b_1$	$\Rightarrow$
(3) $\psi = \frac{3x+4x^2}{5}$	$=\frac{3}{5}\psi_1 + \frac{4}{5}\psi_2$	$A=\text{不確定}$	
	$=\frac{7}{5\sqrt{2}}\phi_1 - \frac{1}{5\sqrt{2}}\phi_2$	$B=\text{不確定}$	?

図 7-5 量子力学における「状態」:

量子力学では, ケース (1) のように, 「位置」は確定した値を持っているが「運動量」は値を持たないような「状態」, ケース (2) のように「運動量」は確定した値を持つが「位置」は値を持たないような「状態」, そしてケース (3) のように「位置」も「運動量」も確定した値を持たないような「状態」, これら古典物理学では考えられなかったような「状態」が登場する.

しかしながら, だからと言って (7.48) 式で与えられる状態  $\psi$  は, 電子の「存在しない」状態などと考えるはいけない. 古典物理学の延長で, 「存在」ということを, 必ず「1つの位置座標」, 「1つの運動量」を持っている状態と考えるはならない. (7.48) で与えられる状態は, あくまで電子1個のある「1つの存在状態」を示しているものである. 量子力学においては, 「状態」そのものが本質的な概念であり, 特定の観測値を持つ

ている (確定している) かどうかにかかわらず, 意味を持っている. 「確率」的にしかモノが言えないのは, この「状態」を観測するときに, どのような測定値を得るか (例えば物理量  $A$  の観測で, 測定値  $a_1, a_2$  をどのような確率で得るか) であって, 電子 1 個の「存在」に対しては, 1 つの「状態」が確定的に対応している. 電子 1 個は, あくまで, 1 つの定まった波動関数 (例えば, (7.48) 式で記述される 1 つの「状態」として「存在」するのである!

## 7.8 [参考] ディラックの記法

量子力学における「状態」という概念は, このように古典的物理学での「状態」という概念とは大きく異なっている. 歴史的には, この「状態」という概念を, 「波動関数」で記述することが行われて来たが, この「状態」という概念は古典論的な描象とは根本的に異なるということを強調するためには, むしろ特別の記号を使った方が良くかもしれない. イギリスの数理論理学者 Dirac (1933 年, Schrödinger と共に, 量子力学建設への功績によりノーベル賞を受賞) は, 「状態」という物理的概念を記述するために, 特別の記号  $|\psi\rangle$  を用いた.

例えば, (7.14) 式は, ディラックの記法では,

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle \quad (7.60)$$

と書く. この場合,  $A$  はもはや微分演算子である必要はなく,  $|\psi\rangle$  という数学量に操作する演算子と考えるだけでよい.  $|\psi\rangle$  を「状態ベクトル」と呼ぶこともある. 固有値  $a$  のみが普通の数であり,  $a|\psi\rangle$  と書いても,  $|\psi\rangle a$  と書いてもどちらでもよい. しかし,  $A$  と  $|\psi\rangle$  は順序を勝手に書き換えることはできず,  $A|\psi\rangle$  を  $|\psi\rangle A$  と書いてはいけない. (7.14) では,  $\psi$  は,  $\psi(x, y, z)$  なる位置座標  $x, y, z$  (そして, 更には時間  $t$ ) のある関数であったが, Dirac の考案したこの  $|\psi\rangle$  は, (7.14) 式をもっと抽象化・一般化した数学的記述となっている. 従って,  $|\psi\rangle$  は必ずしも位置  $x, y, z$  の関数と考える必要はない.

ディラックの記法を使えば, (7.20) は

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle + \dots \quad (7.61)$$

と書く. 記号  $|\bigcirc\rangle$  において  $\bigcirc$  の部分は, その状態  $|\bigcirc\rangle$  の物理的意味がすぐ見えるような書き方が便利なので, その状態が固有状態である場合,  $\bigcirc$  の部分に, その固有

値を書くことが多い。即ち、(7.61)において、 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} A|\psi_1\rangle &= a_1|\psi_1\rangle, \\ A|\psi_2\rangle &= a_2|\psi_2\rangle, \\ &\dots \end{aligned} \tag{7.62}$$

なる物理量  $A$  の固有値  $a_1, a_2, \dots$  を持つ固有状態なので、 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$  をしばしば  $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots$  と書く。こう書いても、 $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots$  は、固有値 (普通の数)  $a_1, a_2, \dots$  を表すのではなく、 $a_1, a_2, \dots$  を固有値として持つ「状態ベクトル」を表しているのであって、普通の数のように取り扱うことのできない数学量である。(7.61) を書き直すと

$$|\psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle + \dots \tag{7.63}$$

となる。

状態  $|\bigcirc\rangle$  を  $|\bigcirc\rangle \rightarrow \langle\bigcirc|$  に、また複素数  $c$  を  $c \rightarrow \bar{c}$  に置き換えた量を、もとの量にして、「エルミート共役量」と呼ぶ。例えば、 $c_1|a_1\rangle$  のエルミート共役量は、 $\bar{c}_1\langle a_1|$  である。<sup>8</sup> 複素数についての関係式があると、その複素共役をとった式も同様に成立する<sup>9</sup> のと同じように、(7.63) に対して、そのエルミート共役をとった式

$$\langle\psi| = \bar{c}_1\langle a_1| + \bar{c}_2\langle a_2| + \dots \tag{7.64}$$

も同様に成立する。

このような状態ベクトルの記号  $|\bigcirc\rangle$  と  $\langle\bigcirc|$  とを用いると、(7.23) で書かれた直交規格化条件は、

$$\langle a_n|a_m\rangle = \begin{cases} 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases} \tag{7.65}$$

<sup>8</sup>この  $\bar{c}_1$  と  $\langle a_1|$  の順序は、 $\bar{c}_1$  が普通の数だから、 $\bar{c}_1\langle a_1|$  と書いても  $\langle a_1|\bar{c}_1$  と書いてもどちらでもよい。

<sup>9</sup>例えば、

$$(3 + 2i) + (1 + 4i) = (4 + 6i)$$

という複素数の関係式が成立していれば、その複素共役をとった式

$$(3 - 2i) + (1 - 4i) = (4 - 6i)$$

も同様に成立する。

と書ける. この記法では, (7.24) の計算は,

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle &\equiv \langle \psi | A | \psi \rangle \\
 &= \langle \psi | A(c_1 | a_1 \rangle + c_2 | a_2 \rangle + \dots) \\
 &= \langle \psi | (c_1 A | a_1 \rangle + c_2 A | a_2 \rangle + \dots) \\
 &= \langle \psi | (c_1 a_1 | a_1 \rangle + c_2 a_2 | a_2 \rangle + \dots) \\
 &= c_1 a_1 \langle \psi | a_1 \rangle + c_2 a_2 \langle \psi | a_2 \rangle + \dots \\
 &= c_1 a_1 \bar{c}_1 + c_2 a_2 \bar{c}_2 + \dots \\
 &= a_1 |\bar{c}_1|^2 + a_2 |\bar{c}_2|^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{7.66}$$

ここで,  $\langle \psi | a_n \rangle$  の計算は

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | a_n \rangle &= (\bar{c}_1 \langle a_1 | + \bar{c}_2 \langle a_2 | + \dots) | a_n \rangle \\
 &= \bar{c}_1 \langle a_1 | a_n \rangle + \bar{c}_2 \langle a_2 | a_n \rangle + \dots = \bar{c}_n
 \end{aligned} \tag{7.67}$$

として, (7.65) の直交規格化条件を使った.

この計算にも見られるように, 一般に, 「状態」を表す量  $| \bigcirc \rangle$  は, 普通の数とは異なった数学量として扱わなければならないが, 状態  $\langle \bigcirc |$  と  $| \bigcirc \rangle$  とが組合わさって,  $\langle \bigcirc | \bigcirc | \bigcirc \rangle$  の形となるときは, 全体としては必ずそれは普通の数となる. 例えば, (7.66) において,  $\langle \psi | A | \psi \rangle$  や  $\langle \psi | a_1 \rangle$ ,  $\langle \psi | a_2 \rangle$  などは, 普通の数を表わす.<sup>10</sup>

また, 状態  $|\psi\rangle$  が固有状態  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots\}$  で完全に展開できるという条件は,

$$1 = |a_1\rangle \langle a_1| + |a_2\rangle \langle a_2| + \dots \tag{7.68}$$

と書く. ディラックの記法では,  $\langle \bigcirc | \bigcirc \rangle$  は単なる数であったが,  $| \bigcirc \rangle \langle \bigcirc |$  はそうではない. (7.68) の両辺に, 右から  $|\psi\rangle$  をかけてやれば

$$|\psi\rangle = |a_1\rangle \langle a_1 | \psi \rangle + |a_2\rangle \langle a_2 | \psi \rangle + \dots \tag{7.69}$$

<sup>10</sup>実は前節まで「状態」を記述するために用いてきた波動関数  $\psi(x)$  なるものは位置  $x$  についての固有状態  $|x\rangle$  と状態ベクトル  $|\psi\rangle$  とから

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$$

として与えられるものであった. 今までの取扱いで位置  $x$  と運動量  $p_x$  において, 運動量  $p_x$  のみを  $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  として演算子の扱いをして, 一方位置  $x$  演算子として扱わなかったが, これは, 暗黙に, 位置  $X$  (一般的には演算子であってよいので, 演算子の場合は大文字を使うことにする) の固有状態  $|x\rangle$  を想定しての定式化であった. 即ち  $X|x\rangle = x|x\rangle$  であるので,  $X = x$  と書いたにすぎない.

となる. (7.67) を導びいたのと同様に, (7.65) を用いて,

$$\langle a_1 | \psi \rangle = c_1, \quad \langle a_2 | \psi \rangle = c_2, \dots \quad (7.70)$$

の関係を導けるので, (7.69) は確かに

$$|\psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle + \dots \quad (7.71)$$

と  $|a_1\rangle, |a_2\rangle$ , で展開できる.

もし, 状態  $|\psi\rangle$  が別の物理量  $B$  の固有状態  $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots\}$  でも展開できるのなら,

$$1 = |b_1\rangle\langle b_1| + |b_2\rangle\langle b_2| + \dots \quad (7.72)$$

が成立し,  $|\psi\rangle$  は

$$|\psi\rangle = c_1^b|b_1\rangle + c_2^b|b_2\rangle + \dots \quad (7.73)$$

と書ける. ここで  $c_1^b, c_2^b, \dots$  は

$$c_1^b = \langle b_1 | \psi \rangle, \quad c_2^b = \langle b_2 | \psi \rangle, \dots \quad (7.74)$$

で与えられる. なお, 異なる物理量  $A, B$  の固有状態  $|a_n\rangle$  と  $|b_m\rangle$  との間には, (7.65) のような直交規格化条件は存在しない.  $\langle a_n | b_m \rangle$  の値がどれだけになるかということは, 個々の物理的状態について, 異なってくる.

前節 7.7 の議論を, このディラックの記法を用いると次のようになる. (7.53) は

$$|\psi\rangle = \frac{3}{5}|a_1\rangle + \frac{4}{5}|a_2\rangle, \quad (7.76)$$

(7.56), (7.57) は

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|a_2\rangle, \quad (7.77)$$

$$|b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|a_2\rangle,$$

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b_2\rangle, \quad (7.78)$$

$$|a_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b_2\rangle,$$

と書ける. (7.58) は, (7.77) (あるいは (7.78)) から,

$$\begin{aligned}\langle b_1|a_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \langle b_2|a_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle b_1|a_2\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \langle b_2|a_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{7.79}$$

であるので, 公式

$$1 = |b_1\rangle\langle b_1| + |b_2\rangle\langle b_2|\tag{7.80}$$

を用いて,

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \frac{3}{5}|a_1\rangle + \frac{4}{5}|a_2\rangle \\ &= (|b_1\rangle\langle b_1| + |b_2\rangle\langle b_2|) \left( \frac{3}{5}|a_1\rangle + \frac{4}{5}|a_2\rangle \right) \\ &= \frac{3}{5} (|b_1\rangle\langle b_1|a_1\rangle + |b_2\rangle\langle b_2|a_1\rangle) + \frac{4}{5} (|b_1\rangle\langle b_1|a_2\rangle + |b_2\rangle\langle b_2|a_2\rangle) \\ &= \frac{3}{5} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b_2\rangle \right) + \frac{4}{5} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b_2\rangle \right) \\ &= \frac{1}{5\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{7}{5\sqrt{2}}|b_2\rangle\end{aligned}\tag{7.81}$$

と計算できる.

このようなディラックの記法は, 初めの内はちょっととまどうかもしれないが, 使い慣れると大変便利な点が多いので, 現在では量子力学の記法としてスタンダードな地位を占めている. しかし, 実際の物理の具体的な計算では, 波動関数という具体的な数学量を扱う方が実際的であることもある. 量子力学の応用 (物理や化学, エレクトロニクスへの) にウェイトを置く教科書では, 「状態」の記述に「波動関数」を使うことが多い. 一方, 量子力学の体系・骨組みや基本的な公式を理解してもらうことにウェイトを置く教科書では, ディラックの記法に従って「状態」を記述してあるものが多い.

## 7.9 量子力学における「状態」: $K$ 中間子での例

7.3 で説明したように, 一般の状態  $\psi$  は, 任意の物理量  $A$  の固有関数  $\psi_n$  を使って, (7.20) 式のように書くことができ,  $\psi_1, \psi_2, \dots$  の係数の絶対値の 2 乗  $|c_1|^2, |c_2|^2, \dots$  は, 状態  $\psi$  を観測 ( $A$  について) したときに, 観測値  $a_1, a_2, \dots$  を得る確率を与えてくれ

た. このように, 波動関数  $\psi$  はいろいろの物理量の観測に際しての観測値得る確率を与えてくれるものなので, 量子力学の初期には, この波動関数のことを「確率波」とも呼んだ.

しかしながら, 波動関数 (7.20) において, 物理的意味を持つものは, 単に確率を与えるところの  $|c_1|^2, |c_2|^2, \dots$  のみではなくて,  $c_1, c_2, \dots$  そのものの値 (即ち, 大きさだけでなく符号も含めて) であることに注意しよう. 例えば, 7.4 の (7.28) 式に例として示した

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 \quad (7.82)$$

は, もしエネルギーを観測すれば, 値  $E_1$  または  $E_2$  を各々確率  $\frac{1}{2}$  で得る状態であったが, この確率のみを問題とするなら, 係数の符号を変えた

$$\psi' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 \quad (7.83)$$

もまた, 同じくエネルギーの観測で, 値  $E_1$  または  $E_2$  を各々確率  $\frac{1}{2}$  で与えるところの状態である. しかしながら, むろんこれら 2 つの状態は全く異なる状態であり, もし他の物理量についての固有関数で  $\psi$  と  $\psi'$  を書き下すなら, そのときの係数の大きさは, 一般には各々異なってしまうであろう.

(7.82) と (7.83) との違いを理解する他の例として, ここでは, 素粒子の  $K$  中間子<sup>11</sup>の場合について紹介しよう.

中性ケイ中間子には, 生成反応 (衝突反応) において, 2 種類のケイ中間子,  $K^0$  と  $\bar{K}^0$  との存在が知られている.  $K^0$  と  $\bar{K}^0$  とは, 質量はほとんど同じであるが, 他の粒子との衝突での反応の様は全く異なる. 例えば, 陽子  $p$  に, 負荷電のパイ中間子  $\pi^-$  を加速して衝突させると  $K^0$  中間子が生成されるが, 正荷電パイ中間子  $\pi^+$  を衝突さ

<sup>11</sup>一般に, 物質は原子 (大きさは約  $10^{-10}\text{m}$  程度) から構成され, またその原子は中心に原子核と呼ばれる正荷電物質 (大きさは約  $10^{-15}\text{m}$  程度) と, その外側を回る電子 (軌道半径約  $10^{-10}\text{m}$  程度) とによって構成されている. 更にこの原子核は, 陽子  $p$  と中性子  $n$  とによって構成されている. これら  $p$  と  $n$  は,  $10^{-10}\text{m}$  という小さな領域に強い力でしっかりと密接して結合しているのだが, この結合に役割を果たす粒子が湯川秀樹が理論的に予言した (1935 年) パイ中間子  $\pi$  である (実験的発見は 1947 年). これら, 物質を構成する基本粒子を「素粒子」という. 1960 年代に入って, 人工的に素粒子を衝突させて反応を起こさせる装置が開発されると, 「素」粒子の仲間は,  $p, n, \pi$  以外にも続々と新しい仲間が発見された. ケイ中間子は, パイ中間子と広い意味では同じ仲間属するが, その質量はパイ中間子の約 3.6 倍である. なお, 「中間子」は “meson” の日本語訳であるが, 最近では日本語でも「メソン」とそのまま記述されることが多い.

せると、 $\bar{K}^0$  中間子が生成される：

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda, \quad (7.84)$$

$$\pi^+ + p \rightarrow \bar{K}^0 + K^+ + p, \quad (7.85)$$

( $\Lambda$  はラムダ粒子と呼ばれる粒子で、広い分類では  $p$  や  $n$  と同じ仲間に属する). 中性ケイ中間子は電氣的に中性なので、普通の観測装置ではその飛跡は写らない. しかし、この中性ケイ中間子を再び陽子  $p$  に衝突させてやると、 $K^0$  では

$$K^0 + p \rightarrow K^0 + p \quad (7.86)$$

なる反応 (散乱の方向が変わるのみで、粒子の種類は変わらない) が起こるだけだが、 $\bar{K}^0$  では

$$\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda \quad (7.87)$$

なる反応を起こすので、どちらの  $K$  ( $K^0$  か  $\bar{K}^0$  か) が陽子と衝突したかは、実験的に区別することができる. このように、2 つの中性ケイ中間子は、質量は同じだが、衝突反応では明らかに異なる性質を示し、 $K^0$  と  $\bar{K}^0$  とは全く別の粒子<sup>12</sup>である.

この中性ケイ中間子について、次のような奇妙な現象が観測されている. 今、陽子  $p$  に負荷電パイ中間子  $\pi^-$  を衝突させる実験を行う. (7.84) によって、このとき  $K^0$  中間子が生まれる. 実際、もしこのとき、この生まれた中性ケイ中間子をすぐに再び陽子  $p$  に衝突させてやれば、(7.86) の反応が起こるので、確かに  $K^0$  が生まれたということを確認することができる. しかし、そうはさせないで、この反応 (7.84) によって生まれた中性ケイ中間子をしばらく真空中を走らせた後、陽子に衝突をさせるとき、奇妙な現象が起こる. 当然、 $K^0$  が生まれて、これが走って陽子と衝突したのであるから、(7.86) の反応が起こるはずであるが、実際に実験をしてみると、 $\pi^+ + \Lambda$  が生成されるということが起こった. この反応は、(7.87) より  $\bar{K}^0$  粒子と陽子  $p$  との衝突を意味し、従って  $K^0$  として生まれて走ってきたはずの粒子は、いつの間にか  $\bar{K}^0$  粒子に変わってしまったことになる. むろん  $K^0$  が生まれた後は、真空中を走って来ただけであるから、他の粒子と衝突の結果  $K^0 + X \rightarrow \bar{K}^0 + Y$  などと変化したわけではな

<sup>12</sup>実は  $K^0$  と  $\bar{K}^0$  とは互いに他の反粒子の関係にある. 即ち  $K^0$  と  $\bar{K}^0$  とがもし衝突を起こすと、2 つの粒子は真空へと消えて、代わりに大きなエネルギーが発生する.

い。まさに  $K^0$  であった粒子 1 個が、 $\bar{K}^0$  という粒子 1 個に姿を変えてしまったことになる!

このことを理解するために、もう少し別の実験事実を紹介する。この中性  $K$  中間子は、不安定粒子であり、他の粒子と衝突などしなくとも、自然に崩壊をする。この自然崩壊に関しては、2 つのタイプの中性ケイ中間子の存在が知られており、その 1 つは、非常に短い寿命  $\tau_S = 0.89 \times 10^{-10}$  秒で 2 つのパイ中間子へ崩壊をするもの (それを  $K_S$  粒子と呼ぶ) であり、他の 1 つは、それよりはやや長い寿命  $\tau_L = 5.2 \times 10^{-8}$  秒で 3 つのパイ中間子へと崩壊をするもの (それを  $K_L$  粒子と呼ぶ) である:

$$\begin{aligned} K_S &\rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad \pi^0 + \pi^0, \\ K_L &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \quad \pi^0 + \pi^0 + \pi^0, \end{aligned} \quad (7.88)$$

これら、 $K_S, K_L$  粒子はともに  $K^0, \bar{K}^0$  粒子と同じ質量を持っている。

実は、この中性ケイ中間子は、衝突反応実験では  $K^0$  または  $\bar{K}^0$  粒子としてふるまい、自然崩壊現象では  $K_S$  または  $K_L$  粒子としてふるまうという、大変おもしろい性質を持っている。即ち、衝突反応における固有状態は  $|K^0\rangle$  と  $|\bar{K}^0\rangle$  であり、自然崩壊における固有状態は  $|K_S\rangle$  と  $|K_L\rangle$  である。ここで  $|K^0\rangle$  は  $K^0$  粒子が 100% の確率で観測される状態を表す ( $|\bar{K}^0\rangle, \dots$  も同様の定義)<sup>13</sup>。衝突反応 (「強い相互作用」による反応) と自然崩壊 (「弱い相互作用」による反応) とは独立な (両立しない) 反応であり、これら 2 つの現象における固有状態 ( $|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle$ ) と ( $|K_S\rangle, |K_L\rangle$ ) との間には

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{K}^0\rangle, \\ |K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{K}^0\rangle, \end{aligned} \quad (7.89)$$

なる関係がある。あるいは、(7.89) を逆に解けば、

$$\begin{aligned} |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|K_L\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|K_S\rangle, \\ |\bar{K}^0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}|K_L\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|K_S\rangle, \end{aligned} \quad (7.90)$$

<sup>13</sup> このディラックの記号  $|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle$  がなじみにくいようなら、以下の  $|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle$  は、今まで通り、波動関数  $\psi_1(x, y, z, t), \psi_2(x, y, z, t)$ 、と書いてもよい。  $K$  中間子が、 $K_L$  粒子  $K_S$  粒子として出現する状態  $|K_L\rangle, |K_S\rangle$  に対しては、別の関数の文字  $\phi_1(x, y, z, t), \phi_2(x, y, z, t)$ 、を使えばよい。

と書ける.

衝突  $\pi^- + p$  によって作り出された中性ケイ中間子はむろん (7.84) に示されるように  $K^0$  粒子であるが, この粒子状態は (7.90) に従って

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K_L\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|K_S\rangle \quad (7.91)$$

と書ける. この  $|K^0\rangle$  状態は, 真空中をしばらく起こる間は, 自然崩壊現象において,  $|K_L\rangle$  または  $|K_S\rangle$  としてふるまう.  $K_S$  粒子の寿命は  $K_L$  粒子の寿命よりはるかに短いので, (7.91) で与えられた粒子状態の中で, 時間とともに  $|K_S\rangle$  成分の方がどんどん  $|K_L\rangle$  に比べて小さくなって行く. 例えば, ある時間後のケイ中間子 1 個の状態  $|K\rangle$  が

$$|K\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|K_L\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|K_S\rangle \quad (7.92)$$

で与えられたとしよう. この状態の粒子は  $2/3 = 67\%$  の確率で  $\pi + \pi + \pi$  に崩壊し,  $1/3 = 33\%$  の確率で  $\pi + \pi$  に崩壊をする. しかし, もしこの状態 (7.92) のときに陽子と衝突をさせるなら, (7.92) の右辺に (7.89) を代入して

$$\begin{aligned} |K\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{K}^0\rangle \right) - \sqrt{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{K}^0\rangle \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}|K^0\rangle - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}|\bar{K}^0\rangle, \end{aligned} \quad (7.93)$$

と読み代えることができるので, この (7.92) (従って (7.93) 状態) は,  $(\sqrt{2}-1)^2/6 = 3\%$  の確率で  $K^0$  粒子としてふるまい (反応 (7.86) を起こす),  $(\sqrt{2}+1)^2/6 = 97\%$  の確率で  $\bar{K}^0$  粒子としてふるまう (反応 (7.87) を起こす) ことになる. このようにして, 当初  $K^0$  粒子であったケイ中間子が, 真空中をしばらく走っている内に,  $\bar{K}^0$  粒子としての性質をも持つようになった次第である<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>なお, もう少し正確に事情を説明すると次の通りである. 反応 (7.84) で作り出された中性ケイ中間子の  $t$  秒後の状態  $|K(t)\rangle$  は

$$|K(t)\rangle = C_L(t)|K_L\rangle + C_S(t)|K_S\rangle, \quad (7.94)$$

で与えられる. ここで  $C_L(t), C_S(t)$  は時間  $t$  の関数であり,

$$\begin{aligned} C_L(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t/2\tau_L}e^{-iE_L t}e^{ipx}, \\ C_S(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t/2\tau_S}e^{-iE_S t}e^{ipx}, \end{aligned} \quad (7.95)$$

で与えられる. ここで,  $\tau_L, \tau_S$  はそれぞれ  $K_L, K_S$  粒子の寿命であり,  $E_L, E_S$  はそれらの粒子の持つエネルギーである. (7.84) の反応の直後  $t = 0$  では確かに  $C_L = C_S = 1/\sqrt{2}$  となるので, (7.94) は (7.91) で

(7.91) を、初め 100 個の  $K^0$  粒子があつて、その内の 50 個は  $K_L$ 、残り 50 個は  $K_S$  などと解釈したのでは、時間がたつて、50 個の  $K_S$  の方は先に自然崩壊をして、(7.92) のように、 $K_L$  と  $K_S$  の個数の比が 2:1 になったところまでの解釈はできても、(7.93) で示したように、それが 97% の確率で当初存在しなかったはずの  $\bar{K}^0$  粒子としてふるまうということの説明はできなくなってしまう。(7.92) あるいは (7.93) はあくまで 1 個の中性ケイ中間子の「状態」についての式であることに注意すべきである。

この具体例は、古典論的描象にしがみつき、1 個の中性ケイ中間子は、 $K^0$  であるか  $\bar{K}^0$  であるか (あるいは  $K_S$  であるか  $K_L$  であるか) 常に必ずそのどちらかの姿をしているべきという考えにこだわる限り、理解できない現象であろう。量子力学では「状態」(波動関数) が本質的であり、中性ケイ中間子が  $K^0$  や  $\bar{K}^0$  としてふるまうか、 $K_S$  や  $K_L$  としてふるまうかは、その観測が生成実験であるか、崩壊実験であるかによる。むろん、1 個の中性ケイ中間子そのものは、常に 1 つの波動関数 (例えば、(7.92), (7.93) 式) によって記述された 1 つの量子力学的状態にあり、決して正体不明のあいまいな存在ではない。

## 7.10 [一般論] ボーアの対応原理

古典力学は、量子力学の 1 つの極限の場合として再現できる。

(7.29) 式におけるプランク定数  $h$  は、大変小さな値

$$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{Joule} \cdot \text{sec} \quad (7.92)$$

であったことを思い起こせば、我々の日常的な物体の力学運動では、(7.29) の右辺はほぼゼロと見なしてよいと言えよう。このとき

$$x \cdot p_x - p_x \cdot x = 0 \quad (7.93)$$

与えられる  $K^0$  粒子の状態を表している。時間の経過とともに、 $\tau_L \gg \tau_S$  であるから  $|C_L|^2 > |C_S|^2$  となる。 $|C_L|^2 + |C_S|^2 = 1$  とならないのは、ケイ中間子はパイ中間子へと自然崩壊を起こすからであり、その結果生じた状態  $|\pi + \pi + \pi\rangle$  と  $|\pi + \pi\rangle$  をも考慮に入れるなら、むろん全体としてはそれらの係数の絶対値の 2 乗は 1 になる。(7.92) で書いた  $|K_L\rangle, |K_S\rangle$  の係数は、実は  $C_L / \sqrt{|C_L|^2 + |C_S|^2}, C_S / \sqrt{|C_L|^2 + |C_S|^2}$  の意味で書かれたものである。

は、「位置」と「運動量」が(近似的に)同時観測可能な量であることを意味し、また、 $x$  と  $p_x$  との順序を交換してもかまわないということは、 $x$  と  $p_x$  が「演算子」ではなく、普通の古典論的な意味での物理量と見なしてよいということの意味する。

**[参考] 大きさの比較**

最も精度のよい実験をしたとして、(7.39) 式より

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \simeq \hbar/2 = 0.527 \times 10^{-34} \text{Joule} \cdot \text{sec}$$

の場合を具体的に見てみよう。(なお、 $\text{Joule} \cdot \text{sec} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}$  とも書ける。)

例えば、直径 1mm の鉄の球(質量  $m = 0.004\text{g}$  とする)が、速さ  $v = 100\text{m/sec}$  で運動したとしよう。その運動量は

$$p = mv = (0.4 \times 10^{-5} \text{kg}) \times (100\text{m/sec}) = 0.4 \times 10^{-3} \text{kgm/sec}$$

であるから、運動量  $p$  の測定に対し 100 兆分の 1( $10^{-14}$ ) の精度で実験するなら、

$$\Delta p = 0.4 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m/sec} \times 10^{-14} = 0.4 \times 10^{-17} \text{kg} \cdot \text{m/sec} .$$

従って

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{0.527 \times 10^{-34} \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}}{0.4 \times 10^{-17} \text{kg} \cdot \text{m/sec}} = 1.3 \times 10^{-17} \text{m}$$

なる不確定さで位置  $x$  の測定が可能である。これは、この球の大きさ  $1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$  に比べて

$$\frac{1.3 \times 10^{-17} \text{m}}{10^{-3} \text{m}} = 1.3 \times 10^{-14}$$

即ち、100 兆分の 1 の精度で同時に位置の測定が可能であることを示す。言い換えれば、「位置」も「運動量」も、ほぼ実用上は同時に「正確な」測定ができるものと考えてさしつかえない。

一方、電子(質量  $m = 0.91 \times 10^{-30} \text{kg}$ ) が速さ  $v = 100\text{m/sec}$  で運動している場合は、

$$p = mv = 0.91 \times 10^{-28} \text{kg} \cdot \text{m/sec}$$

であるから、運動量  $p$  の測定に際し、先の例と同程度の精度 ( $10^{-14}$ ) での実験を要求すれば、これは

$$\Delta p = 0.91 \times 10^{-28} \text{kg} \cdot \text{m/sec} \times 10^{-14} = 0.91 \times 10^{-42} \text{kg} \cdot \text{m/sec}$$

を意味し、これより、このときの位置の測定における不確定さ  $\Delta x$  は

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar/2}{\Delta p} = \frac{0.527 \times 10^{-34} \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}}{0.91 \times 10^{-42} \text{kg} \cdot \text{m/sec}} = 0.58 \times 10^8 \text{m}$$

(約 6 万 km) もの大きな値となる。運動量の測定の精度を、 $p$  の大きさの 1/10 程度に下げたとしても、

$$\Delta p = 0.91 \times 10^{-28} \text{kg} \cdot \text{m/sec} \times 10^{-1} = 0.91 \times 10^{-29} \text{kg} \cdot \text{m/sec}$$

であるから、

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar/2}{\Delta p} = \frac{0.527 \times 10^{-34} \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}}{0.91 \times 10^{-29} \text{kg} \cdot \text{m/sec}} = 0.58 \times 10^{-5} \text{m}$$

となり、普通「原子」の大きさと言われている  $10^{-10}\text{m}$  と比べても、なお 10 万倍 ( $10^5$  倍) もの大きな不確定さである。——要するに、これでは、「位置」と「運動量」の同時測定が、例え近似的(実用上)にせよ、全く出来ないということを示している。

このように、 $h \rightarrow 0$  の極限では、量子力学のすべての式は、古典力学の式と同じになってしまう。古典力学のいろいろな式は、少なくとも「それまでの時代」では、実験で十分確かめられたそれなりに“正しい”式であったはずである。もし、新しい物理学が生まれるとしても、それはそれまでの時代に実験的に確かめられた式をすべて完全否定をするものではなく、必ず、かつての実験（観測）技術では扱われなかったような範囲のところでのみ、その新しい理論と古い理論との違いが現れるようになっているべきである。即ち、新しい理論は、ある極限（そこでは古い時代の観測値の領域となる）では、必ず昔の理論の式と一致していなければならない。この考えは、Bohr の「対応原理」と呼ばれ、歴史的には、量子力学の初期における発展に有力な武器として働いた。

但し、 $h \rightarrow 0$  の極限で量子力学はニュートン力学になるというのは、正確に言えば、量子力学による計算結果が  $h \rightarrow 0$  の極限でニュートン力学のそれと一致するということであり、「古典力学は量子力学のその特別な場合 ( $h = 0$ ) として含まれる」というのは、「古典力学の考えかた（自然観）までが、それは量子力学の考えかた（自然観）の特別な場合である」ということではない。——但し、例えば、水素原子の例で、エネルギー固有状態  $\psi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を理解する際に、我々は古典論的ピクチャの助けを借りて、「第  $n$  軌道に電子が居る状態」という言葉を使ったりする。従って、いぜんとし、古典論的な自然に対する描像——例えば、「電子軌道」など——は、量子力学の世界でも有用である。しかし逆に、この古典論的描像は便宜上のものということを忘れて、それにしがみつきすぎると、例えば (7.28) 式の「状態」をどう解釈してよいのか分からなくなってしまうことになる。量子力学を、古典力学の単なる延長線上のものとしてとらえてはならない。